Lezione 19-09

- Sito del corso online

Def: $f : A \to B$

$D \subset A \quad f(D) = \{ b \in B \mid \exists\, a \in D \text{ t.c. } f(a) = b \}$

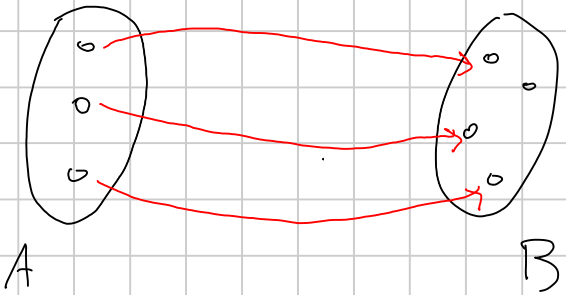
↳ immagine di D tramite f.

$\mathrm{Imm}(f) = f(A)$

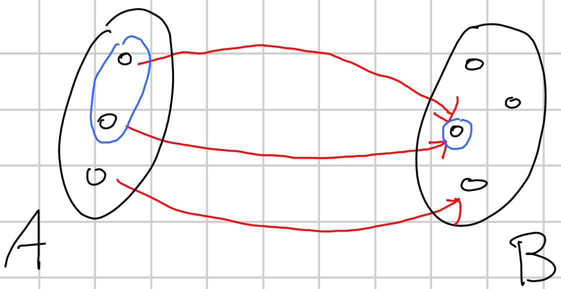
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \quad \mathrm{Imm}(f) = [0, +\infty)$

Def: Data $f: A \to B$, f si dice iniettiva se

$\forall\ a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$ risulta che $f(a_1) \neq f(a_2)$



Iniettiva



Non iniettiva

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$.

$a_1 = -3$ $a_2 = 3$ $f(a_1) = (-3)^2 = 9 = 3 \cdot 3 = f(a_2)$

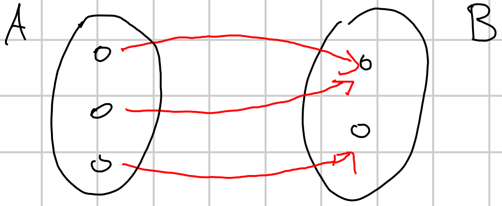
f non è iniettiva.

Osservazione:

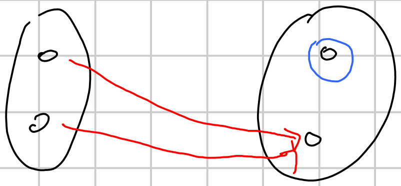
$g: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^2$

g è iniettiva

Def: $f: A \to B$ si dice surgettiva se $\forall\, b \in B$ $\exists\, a \in A$ t.c. $f(a) = b$



Surgettiva

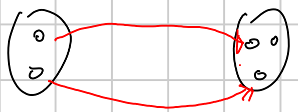


Non surgettiva

Funzione iniettiva non surgettiva

$f:\{0\}\to\mathbb{R}$

$f(0)=0$



Oss: $f: A\to B$ è surgettiva se e solo se $\mathrm{Imm}(f)=B$

Esempio: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$. Non è surgettiva

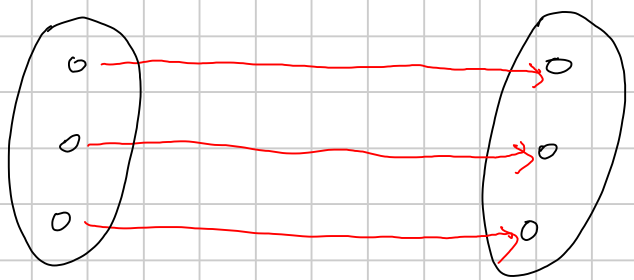
I numeri negativi non appartengono a $\mathrm{Im}(f)$

$g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ $\quad g(x) = x^2$ È surgettiva.

Data $f : A \to B$, se consideriamo $g : A \to \mathrm{Imm}(f)$, definita da $g(a) = f(a)$, allora g è surgettiva.

Def: $f : A \to B$, se f è sia iniettiva che surgettiva f si dice <u>biunivoca</u> o <u>invertibile</u>.

A



B

Data $f: A \to B$ invertibile possiamo costruire l'inversa $f^{-1}: B \longrightarrow A$, definita da $f^{-1}(b) = a$ se e solo se $f(a) = b$.

Dato b esiste almeno un a tale che $f(a) = b$ per surgettività di f, inoltre tale elemento a è unico per iniettività di f.

Esempio: $f: [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ $f(x) = x^2$ è invertibile con inversa $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

! $\sqrt{4} = 2$ Quando scriviamo $\sqrt{x}$ intendiamo sempre l'unico numero reale positivo y tale che $y^2 = x$.

$\sqrt{x} \geq 0$ sempre.

Esempio di grafico di funzione

$f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_4) = d$.

Trovare l'inversa di f.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 3x+2$ (È invertibile)

Vogliamo scrivere l'inversa:

Scriviamo $y = 3x+2$, ricaviamo la x in funzione della y.

$y-2 = 3x$, ..., $\dfrac{y-2}{3} = x$

Definiamo $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ vediamo che $f^{-1}(f(x)) = x$

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x+2) = \frac{(3x+2)-2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$f^{-1} \circ f = Id$ = identità su $\mathbb{R}$

(In generale dato A insieme è sempre definita la funzione $id: A \to A$ tramite $id(a) = a$

Funzioni monotone:

Def: $f: A \to B$ dove $A, B \subset \mathbb{R}$

Se $\forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ risulta:

(1) $f(x_1) < f(x_2)$ f si dice <u>strettamente crescente</u>

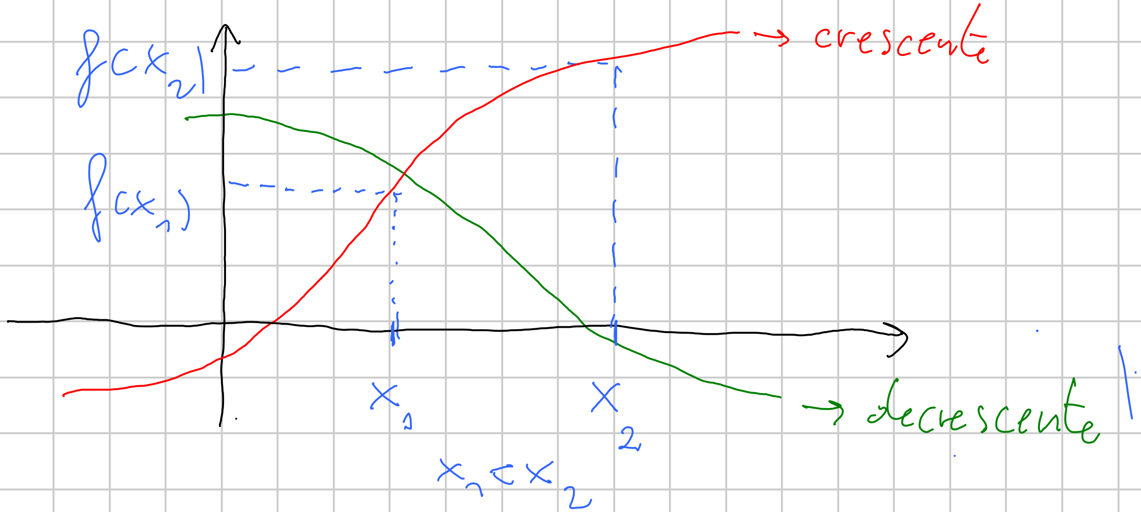
(2) $f(x_1) \leq f(x_2)$ f si dice <u>debolmente crescente</u>

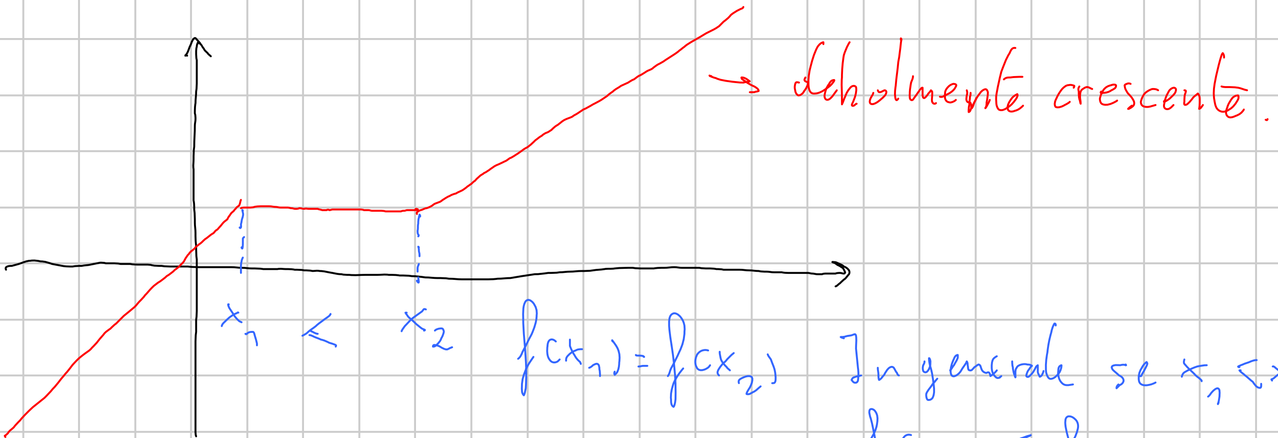
(3) $f(x_1) > f(x_2)$ f si dice <u>strettamente decrescente</u>

(4) $f(x_1) \geq f(x_2)$ f si dice <u>debolmente decrescente</u>.

Se si verificano (1) o (3) f si dice strettamente monotona

(2) o (4) f si dice debolmente monotona.

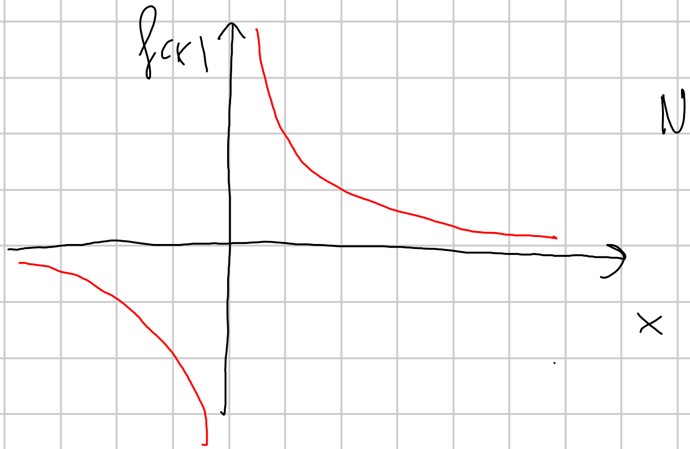




In generale se $x_1 < x_2$
$f(x_1) \leq f(x_2)$

Esempio $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x}$



Non è monotona.

Però f è strettamente decrescente su $(-\infty; 0)$

f è strettamente decrescente su $(0, +\infty)$

$x_1 < 0$, $x_2 > 0$ $f(x_1) < f(x_2)$ pertanto f non è decrescente su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f(x_1) < 0 < f(x_2)$

Def: Date $f: A \to B$ e $g: B \to C$ definiamo la funzione $g \circ f: A \to C$ composizione di g col f.

$$g \circ f(x) = g(\underset{\substack{\uparrow \\ B}}{f(x)})$$

Prop: 1) Se f è crescente e g è crescente, allora $g \circ f$ è crescente.

2) Se f è crescente e g è decrescente $\to$ $g \circ f$ è decrescente

3) Se f è decrescente e g è crescente $\Rightarrow g \circ f$ decrescente

4) Se f e g sono decrescenti $\Rightarrow g \circ f$ crescente

(Esercizio)

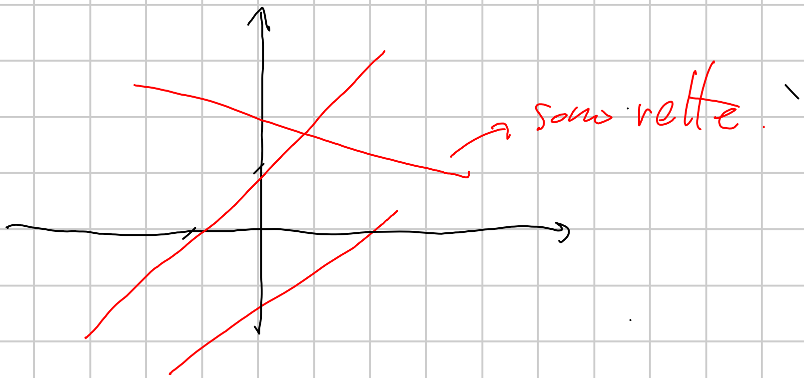
Oss: Se f è strettamente monotona, allora f è iniettiva.

Il viceversa è falso. Esempio $f(x) = \frac{1}{x}$ su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

è iniettiva (addirittura invertibile) ma non monotona.

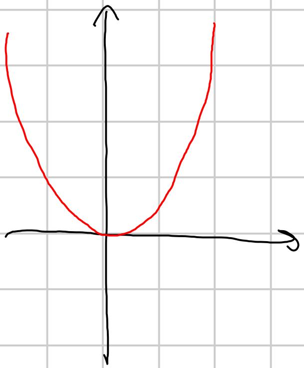
∘ Funzioni elementari:

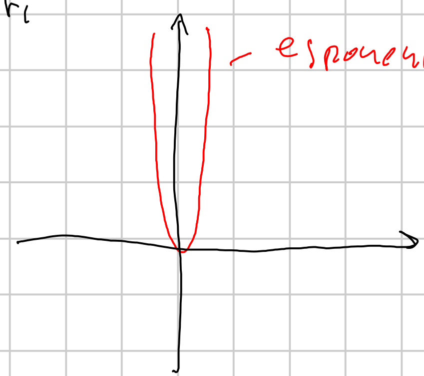
$f(x) = ax+b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$.

k pari





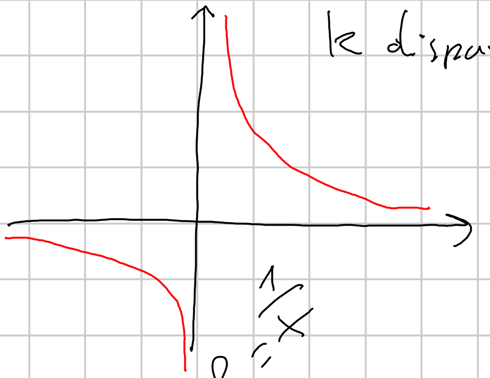
– esponenti grandi

k dispari

$f(x) = x^k \quad k \in \mathbb{Z} \quad k < 0$

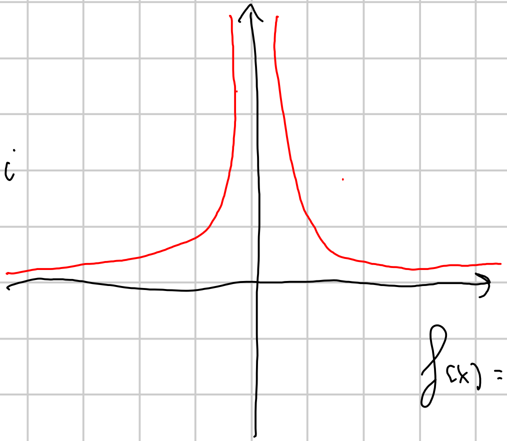
$x^k = \dfrac{1}{x^{-k}}$ $-k > 0$

k dispari



$f(x) = \dfrac{1}{x}$

k pari



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Sono definite su

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $f(x) = x^{p/q}$ $\quad p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, p, q non entrambi pari

Dominio di f ?

$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ $\quad$ Se q è dispari il dominio è $\mathbb{R}$

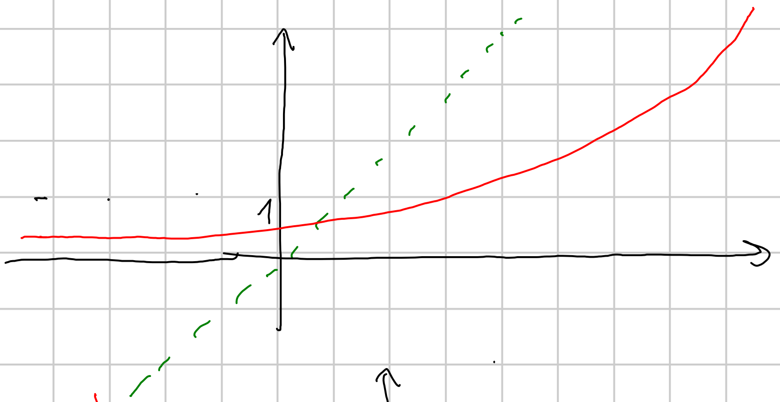
Se q è pari il dominio di $f(x) = x^{p/q}$ è $[0, +\infty)$

$\sqrt{0} = 0$

- Funzione esponenziale

$a \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $a \neq 1$.

$f(x) = a^x$ - definita su tutto $\mathbb{R}$.



$a > 1$

Strettamente crescente se $a > 1$

$0 < a < 1$

Strettamente decrescente se $a < 1$.

$Im(a^x) = (0, +\infty)$

$f(x) = a^x : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ – e' invertibile con inversa la funzione logaritmo in base a

$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

$0 < a < 1$