Lezione 19-11

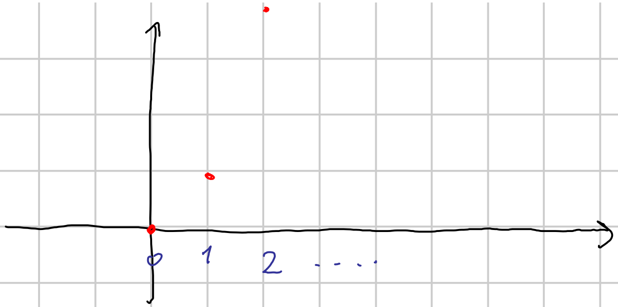
2^a simulazione: Lunedì 9-12 ore 16 Aula C polo Fibonacci.

Successioni

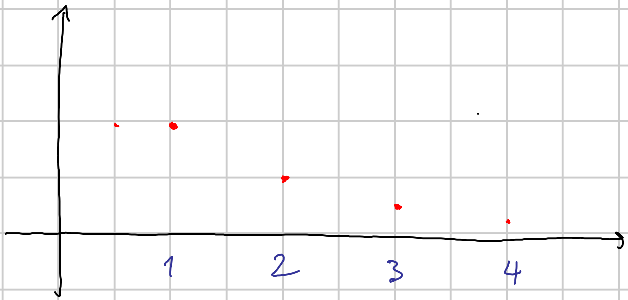
Def: Una funzione che ha come dominio una semiretta di $\mathbb{N}$ si dice una successione.

S = semiretta di $\mathbb{N}$ $\quad S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$

Esempio $f: S \to \mathbb{R}$, $f(n) = n^2$, $S = \mathbb{N}$



Es: $S = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \}$ $\quad f(n) = \frac{1}{n}$.



Notazione: Invece di scrivere $f(n)$, si scrive a_n.

$a_n = n^2$. $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, ...

$a_n = \frac{1}{n}$, $a_5 = \frac{1}{5}$, ...

Per indicare tutta la successione si scrive

$\{a_n\}$ oppure $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{a_n\}_{n \in S}$, $\{a_n\}_{n \geq n_0}$.

Esempio: $a_n = \frac{1}{n-5}$ ha senso per $n \neq 5$. Il dominio non può essere $\{n \in \mathbb{N}, n \neq 5\}$ perché non è una semiretta.

Il dominio sarà $\{n \in \mathbb{N}, n \geq 6\}$

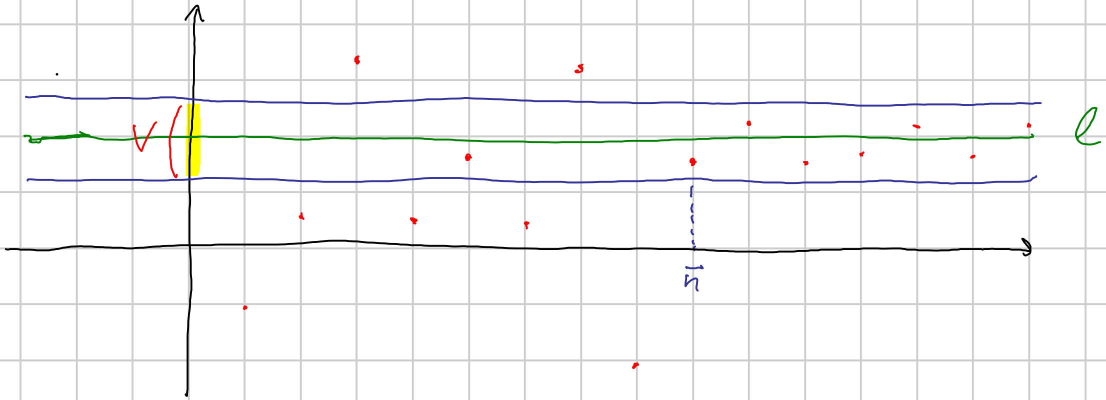
Limiti di una successione

Ha senso solamente fare il limite per $n \to +\infty$, poiché $+\infty$ è l'unico punto di accumulazione per una semiretta di $\mathbb{N}$.

Es: $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Come diventa la definizione di limite per successioni?

Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, se $\forall\, V$ intorno di ℓ $\exists\, \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \bar{n}$ allora $a_n \in V$.



Se un predicato $P(n)$ che dipende da $n \in \mathbb{N}$ è vero $\forall n \geq \bar{n}$

si dice che $P(n)$ è vero definitivamente.

Quindi $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ se $\forall V$ intorno di ℓ, risulta che $a_n \in V$ definitivamente.

Sottosuccessione estratta.

Data $a_n : S \to \mathbb{R}$ successione considero

$k_n : \mathbb{N} \to S$ strettamente crescente (k_n è a valori interi in S —
↳ successione. dominio di a_n).

Considero la composizione di k_n con a_n, cioè a_{k_n}.

ottengo una nuova successione che si dice sottosuccessione

estratta da $\{a_n\}$.

Vuol dire che seleziono solo alcuni elementi della successione

di partenza. Ne seleziono infiniti e in ordine crescente.

Es: $a_n = \frac{1}{n}$. $k_n = 2n+1$ - numeri dispari

$a_{k_n} = \frac{1}{2n+1}$, $a_{k_0} = \frac{1}{1}$, $a_{k_1} = \frac{1}{3}$, $a_{k_2} = \frac{1}{5}$, ...,

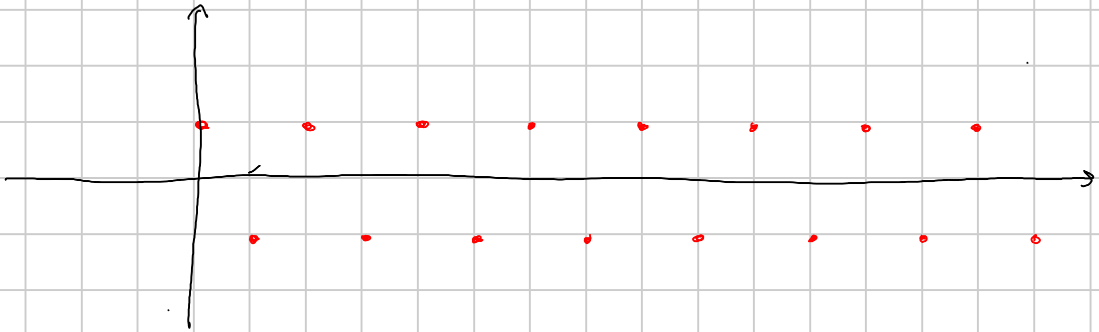
Selezioniamo solo gli indici dispari.

Teorema: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{k_n} = \ell$

per ogni sottosuccessione estratta da $\{a_n\}$.

Serve a dimostrare che il limite non esiste.

Es: $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ e' pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ e' dispari} \end{cases}$



Consideriamo le sottosuccessioni date dai termini pari e dispari:

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = \left[(-1)^2\right]^n = 1^n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = (-1)\cdot(-1)^{2n} = -1\cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = -1.$$

I limiti delle due sottosuccessioni sono diversi, quindi

$\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n.$

- Valgono molti dei teoremi per i limiti di funzioni:
  - Somma e prodotto di limiti
  - Permanenza del segno per limiti.
  - Carabinieri
  - Confronto.
  - Unicità del limite.

Monotonia: Una successione $\{a_n\}$ è debolmente crescente se $\forall n, m \in \mathbb{N}$ con $n < m$ risulta $a_n \leq a_m$ (mantiene l'ordinamento).

È la stessa def. delle funzioni di variabile reale, ma nel caso delle successioni diventa + semplice.

Oss: $\{a_n\}$ è debolmente crescente se e solo se

$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

N: basta confrontare ogni termine con il successivo.

Infatti: $n < m \Rightarrow a_n \leq a_{n+1} \leq a_{n+2} \leq \ldots \leq a_m$.

Es: $a_n = n^2$. vediamo che è strettamente crescente.

Vogliamo verificare che $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$a_n < a_{n+1} \iff n^2 < (n+1)^2 \iff \cancel{n^2} < \cancel{n^2} + 2n + 1 \iff$

$2n+1 > 0$

vero $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

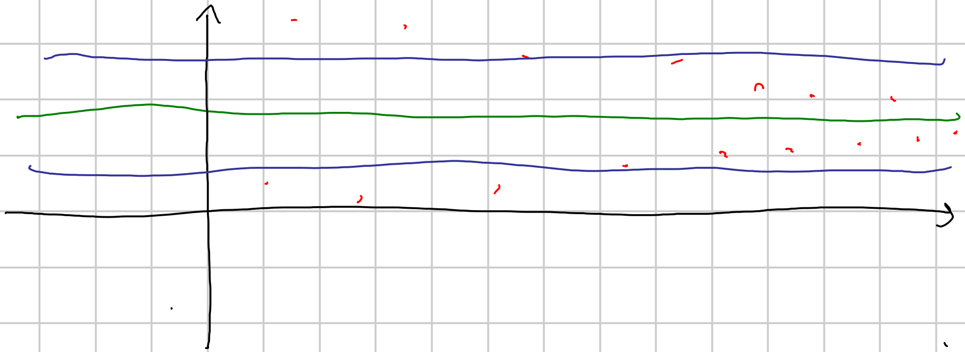
vera

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Def: Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ finito si dice che $\{a_n\}$ e' convergente.

Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \pm\infty$, $\{a_n\}$ si dice divergente

Oss: Una successione convergente e' limitata



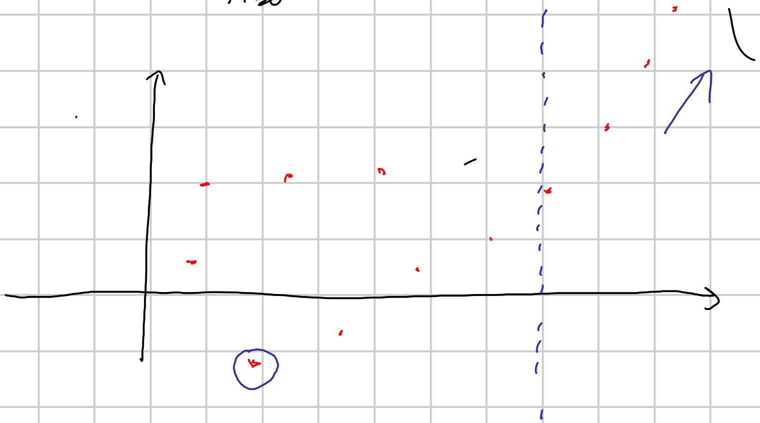
Per funzioni non è vero: $f(x) = \frac{1}{x}$ è convergente ma non limitata.

Invece $a_n = \frac{1}{n}$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_n$ è convergente e $\{a_n\}$ è limitata.

$\inf\{a_n\}=0, \quad \sup\{a_n\}=1.$

Teoremi: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ ha minimo

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \Rightarrow \{a_n\}$ ha massimo



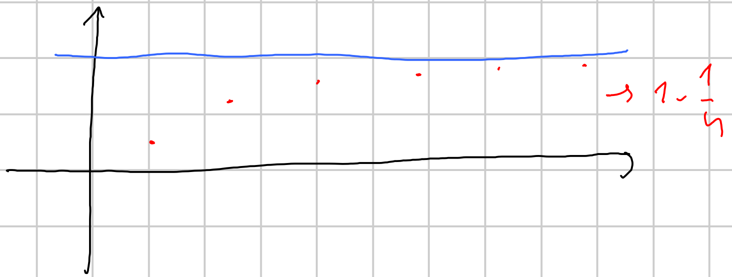
Domanda: Se $\{a_n\}$ è limitata ha necessariamente max e min? NO!

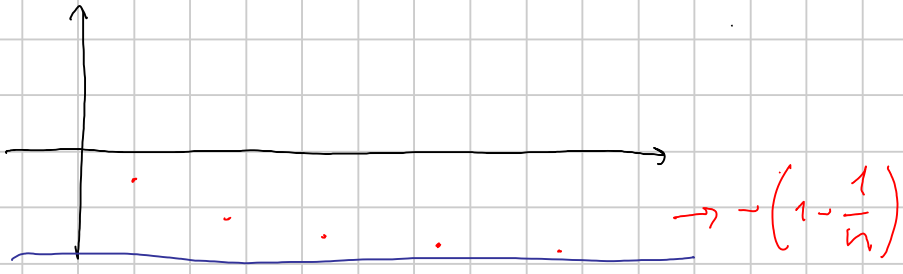
Es: $a_n = \frac{1}{n}$. È limitata. $\max\{a_n\} = a_1 = 1$

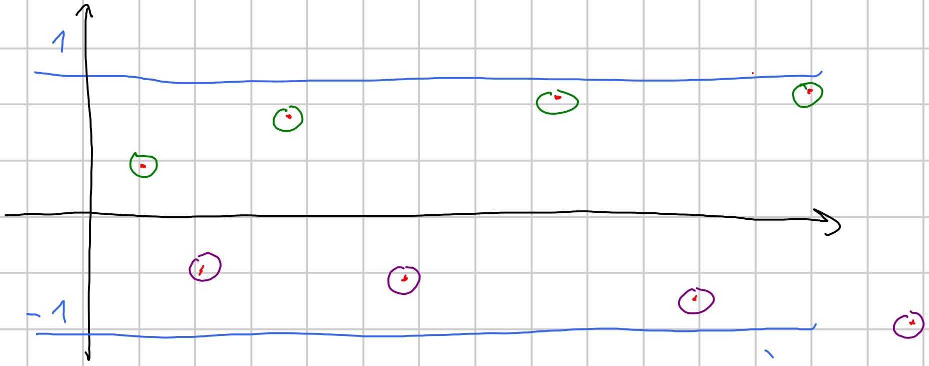
$\inf\{a_n\} = 0$ - ma 0 non è un minimo poiché $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Esempio in cui non c'è né max né min (a_n limitata).

Es: $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$







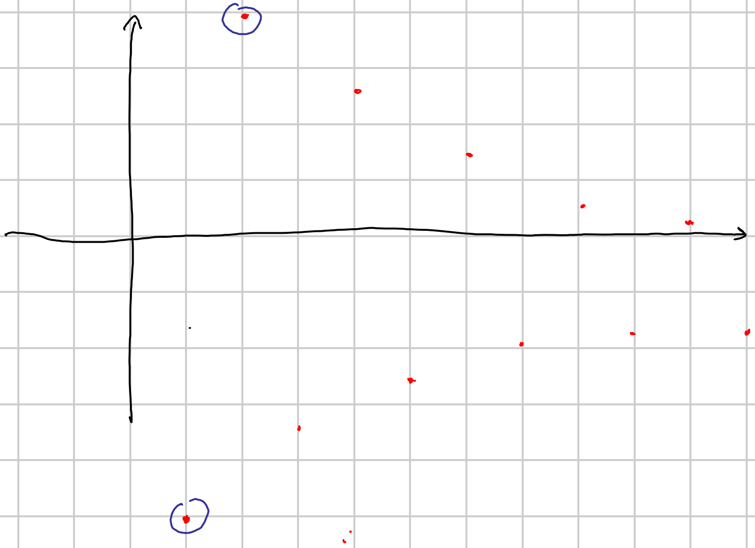
$\sup a_n = 1$

$\inf a_n = -1$

ma a_n non ha né max

né min poiché $-1 < a_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Es: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ e' limitata perchè $-1 \le a_n \le 1$.



$a_1 = -1$

$a_2 = \frac{1}{2}$

$a_3 = -\frac{1}{3}$

$a_4 = \frac{1}{4}$

$\max a_n = \frac{1}{2}$

$\min a_n = -1$

Teorema: Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ (finito), ed

$\exists\ \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} \geq \ell \Rightarrow \{a_n\}$ ha max.

Se $\exists\ \bar{n}$ t.c. $a_n \leq \ell \Rightarrow \{a_n\}$ ha min.

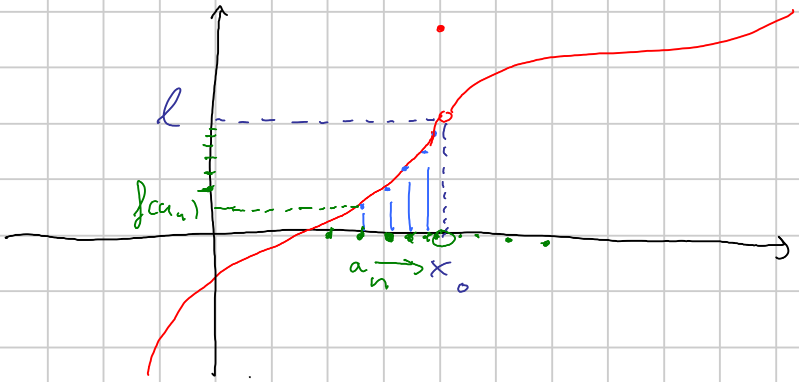
→ Weierstrass generalizzato per successioni.

Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$

Risulta che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

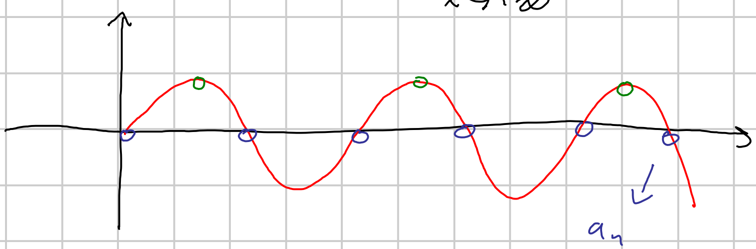
$\forall$ successione $\{a_n\} \subset A$ t.c. $\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$ e $a_n \neq x_0$ definitivamente

vale $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{f(a_n)}_{\text{è una successione.}} = \ell$



Ci dà un criterio per dimostrare che il limite di una funzione non esiste.

Es: Dimostriamo che $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$.



Prendo $a_n = n\pi$ (in questo caso $x_0 = +\infty$)

$$\lim_{n\to+\infty} n\pi = +\infty = x_0$$

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(a_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$$

Prendo $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty = x_0$

$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$$

limiti $\neq$

$\to$ $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ non esiste.