Lezione 21-11

Teorema: Sia $n_0 \in \mathbb{N}$, $f: [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, poniamo $a_n = f(n)$.

Se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, allora $\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Es: $\lim_{n \to +\infty} e^n$

calcolo limite $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

Es: $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cdot\sin\frac{1}{n} = 1$

Consideriamo la funzione $f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \overset{1}{1} + \overset{0}{o\left(\frac{1}{x}\right)} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} o\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \overset{0}{\boxed{x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)}}\cdot\overset{0}{\frac{1}{x}} = 0$$

In alternativa possiamo fare direttamente la sostituzione in $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$, cioè $\sin t = t + o(t^2)$ per $t\to 0$

Sostituiamo $t = \frac{1}{n}$, se $n \to +\infty$, $t = \frac{1}{n} \to 0$

$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \cdot \sin \frac{1}{n} = n\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 1$

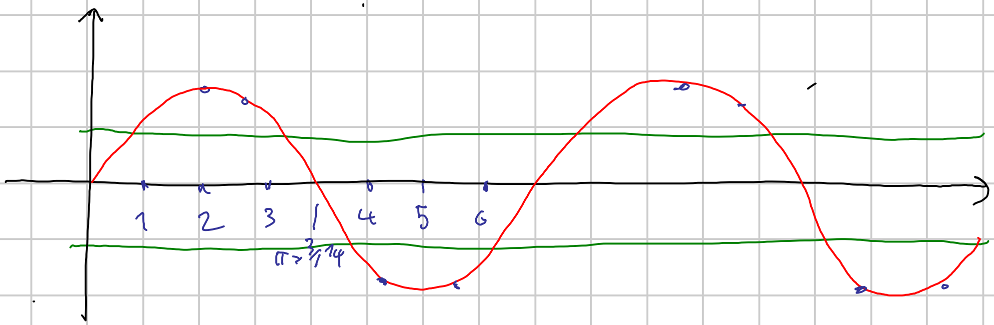
Oss: Il viceversa del teorema in generale è falso:

può esistere il $\lim_{n \to +\infty} f(n)$ ma non esistere $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Es: $f(x) = \sin(\pi x)$ $\quad a_n = f(n) = \sin(\pi n) = 0 \ \forall n$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, però $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin(\pi x)$.

Es: $\exists \lim_{n \to +\infty} \sin n$?? Non esiste.



Risolviamo la disequazione $\sin x \geq \frac{1}{2}$ con $x \in [0, 2\pi]$

$x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ - quanto è grande questo intervallo?

$\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{4}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi > 2.$ $\rightarrow$ l'intervallo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$ contiene almeno 2 numeri interi.

$\Rightarrow$ sin n calcolata in questi numeri interi vale $\geq \frac{1}{2}$.

Di tali intervalli (intervalli su cui il seno è $\geq \frac{1}{2}$) ce ne sono infiniti, allora posso costruire una successione crescente di numeri interi h_n tale che $\sin(h_n) \geq \frac{1}{2}$.

Allo stesso modo posso costruire una sottosuccessione estratta tale che $\sin(k_n) \leq -\frac{1}{2}$

Se esistesse $\lim_{n\to+\infty} \sin(n) = \ell$, allora dovrebbe essere

$\lim_{n\to+\infty} \sin(h_n) = \ell \geq \frac{1}{2}$, $\lim_{n\to+\infty} \sin(k_n) = \ell \leq -\frac{1}{2}$ assurdo

Pertanto $\nexists \lim_{n\to+\infty} \sin n$.

Es: $a_n = n^2 \cdot e^{-\frac{1}{n}} \cdot \sin n \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = ?$

$n^2 \to +\infty \qquad e^{-\frac{1}{n}} \to e^0 = 1, \quad \nexists \lim_{n\to+\infty} \sin n.$

Osserviamo che $\exists\, h_n$ t.c. $\sin(h_n) \geq \frac{1}{2}$ e

$\exists\, k_n : \sin(k_n) \leq -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow h_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{h_n}} \cdot \sin(h_n) \geq h_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{h_n}} \cdot \frac{1}{2} \to +\infty$

$$k_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{k_n}} \cdot \sin(k_n) \leq k_n^2 \cdot e^{-\frac{1}{k_n}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \to -\infty.$$

$\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ perché ho trovato due sottosuccessioni estratte con limiti diversi.

Teorema: Sia $\{a_n\}$ una successione e $\{a_{k_n}\}$ e $\{a_{h_n}\}$ due sottosuccessioni t.c. $\{h_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{k_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$

(si dice che saturano tutti gli indici).

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Caso tipico: indici pari e dispari:

Es: $a_n = \dfrac{\left[\log(n+1)\right]^{(-1)^n}}{n^3}$, $\nearrow 0$ $n \geq 1$.

Indici pari: $h_n = 2 \cdot n$ $n \geq 1$.

$$a_{2n} = \frac{\left[\log(2n+1)\right]^{\overbrace{(-1)^{2n}}^{=1}}}{(2n)^3} = \frac{\log(2n+1)}{(2n)^3} \longrightarrow 0.$$

Indici dispari: $k_n = 2n+1$.

$$a_{2n+1} = \frac{\left[\log(2n+1+1)\right]^{\overbrace{(-1)^{2n+1}}^{=-1}}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{\log(2n+2) \cdot (2n+1)^3} \longrightarrow 0$$

Criterio del rapporto

Se $a_n > 0$ definitivamente e esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora

1) Se $0 \leq \ell < 1$ risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ - a_n converge a 0

2) Se $\ell > 1$ risulta $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ - a_n diverge positivamente.

Oss: Se $\ell = 1$ il criterio non si applica (non sappiamo niente).

Es: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Usiamo criterio rapporto.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Es: $a_n = 2^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \to 2 \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1.$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Es: $\lim_{n\to+\infty} n!$. Criterio rapporto: $a_n = n!$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1)\cdot n!}{n!} = n+1 \longrightarrow +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

In realtà non serviva il criterio del rapporto poiché

$$n! \geq n \longrightarrow +\infty$$

Velocità di $n!$

Confronto con le potenze. $k \in \mathbb{N}$ fissato.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^k} = \frac{\infty}{\infty}. \qquad a_n = \frac{n!}{n^k} \text{ e usiamo criterio del rapporto.}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^k} \cdot \frac{n^k}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^k}{(n+1)^k} = \underbrace{(n+1)}_{+\infty} \cdot \Big(\overbrace{\frac{n}{n+1}}^{1}\Big)^k \to$$

$$(+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\frac{n}{n+1} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^k} = +\infty. \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Confronto con l'esponenziale:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} \quad \text{con } b > 1 \qquad a_n = \frac{n!}{b^n} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{b^n}{b^{n+1}} = \underbrace{(n+1)}_{\to +\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{b}}_{\to \frac{1}{b}} \to (+\infty) \cdot \frac{1}{b} = +\infty.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty.$$

Es: $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$ $\qquad a_n = \frac{n^n}{n!} \qquad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} =$$

$$= \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1$$

$$\Rightarrow \lim a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Criterio della radice.

Se $a_n \geq 0$ definitivamente:

Se $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$ allora

a) Se $0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ - converge a 0

2) Se $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ – a_n diverge positivamente

Oss. Se $\ell = 1$ il criterio non si applica.

Dim: $0 \leq \ell < 1$

Posso trovare $m \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell < m < 1$

Uso la definizione di limite per $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$ scegliendo $\varepsilon = m - \ell$

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. se $n \geq \bar{n} \Rightarrow \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

In particolare, scegliendo $\varepsilon = m - \ell$, ottengo

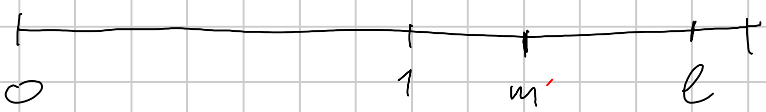
$$\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon = \ell + m - \ell = m$$

$\sqrt[n]{a_n} < m$ $\rightarrow$ elevo alla n e ottengo $a_n < m^n$

$$\Rightarrow \underset{\downarrow \atop 0}{0} \le a_n < \underset{\downarrow \atop 0}{m^n} \Rightarrow \text{teo carabinieri } a_n \to 0$$

$m < 1$

2) $\ell > 1$



Come prima scegliamo m t.c. $1 < m < \ell$, Come prima ottengo che $\forall n \geq \bar{n}$ $\sqrt[n]{a_n} > m > 1$ (definitivamente)

$\Rightarrow a_n > m^n$, pertanto $a_n \to +\infty$

$m^n \to +\infty$ $(m > 1)$

Collegamento tra i due criteri:

Teo: Se $a_n > 0$ definitivamente

Se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ allora $\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Oss. Non importa se ℓ è < 1, oppure > 1, oppure 1

Oss: può esistere $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e non esistere $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Es: $a>0$ fissato

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}$. Poniamo $a_n = a$ $\forall n$ (costante)

Calcoliamo $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{a} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$

$\Rightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

per il teorema precedente

Es: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}$, $a_n = n$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \to 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} = 1 \cdot 1 = 1$ $\quad \boxed{\sqrt[n]{n^k} \to 1}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1$

Es: Può esistere $\lim \sqrt[n]{a_n}$ ma non $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$1 \leq a_n \leq 2$$

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{2} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$1 \qquad 1 \qquad 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{2}{1} & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

In generale se $\exists\, a, b$ t.c. $0 \leq a \leq a_n \leq b$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1 \quad \text{poiché} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{a}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{b}}$$