Lezione 22-10

Simulazione test: Lunedì 28 ottobre ore 14 Aula A

Ricevimento di oggi: ore 15 Aula 1 D.M.

Ci saranno le derivate

Asintoti

Asintoti orizzontali

Def: $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ (limite finito)

allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione

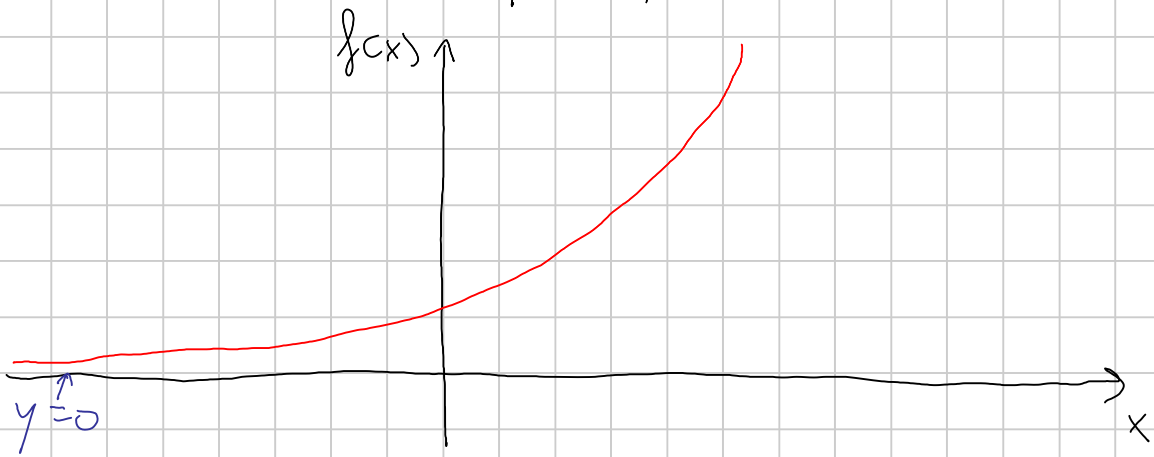
$y = \ell$ per $x \to +\infty$

(Definizione analoga a $-\infty$)

Esempio: $f(x) = e^x$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow f$ ha un asintoto orizzontale

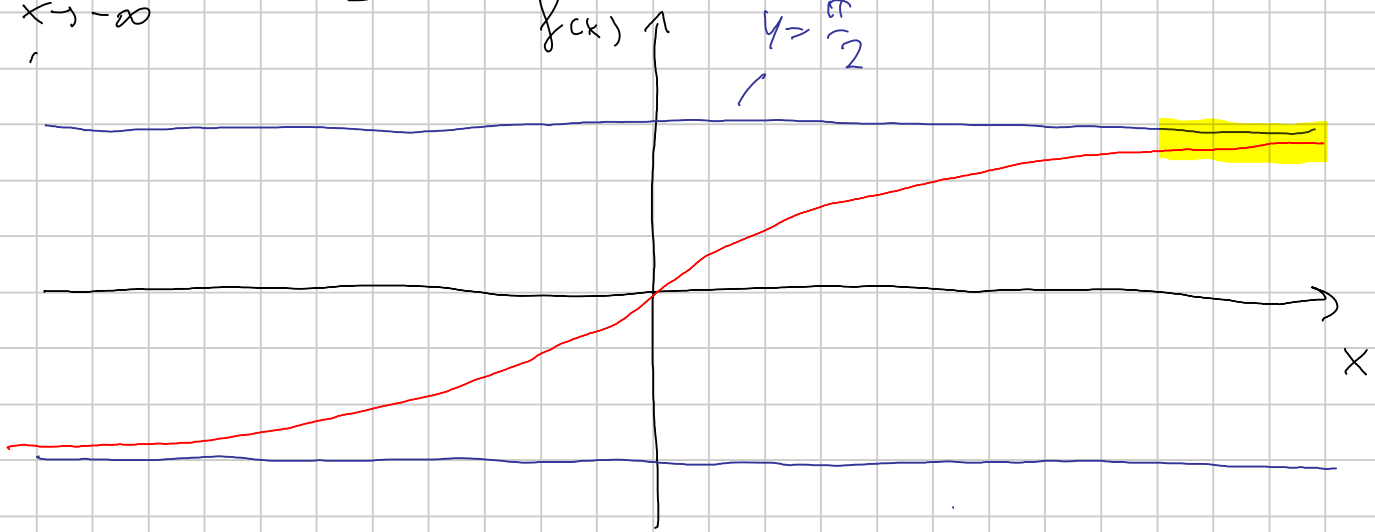
di equazione $y = 0$ per $x \to -\infty$



Esempio 2: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan x$.

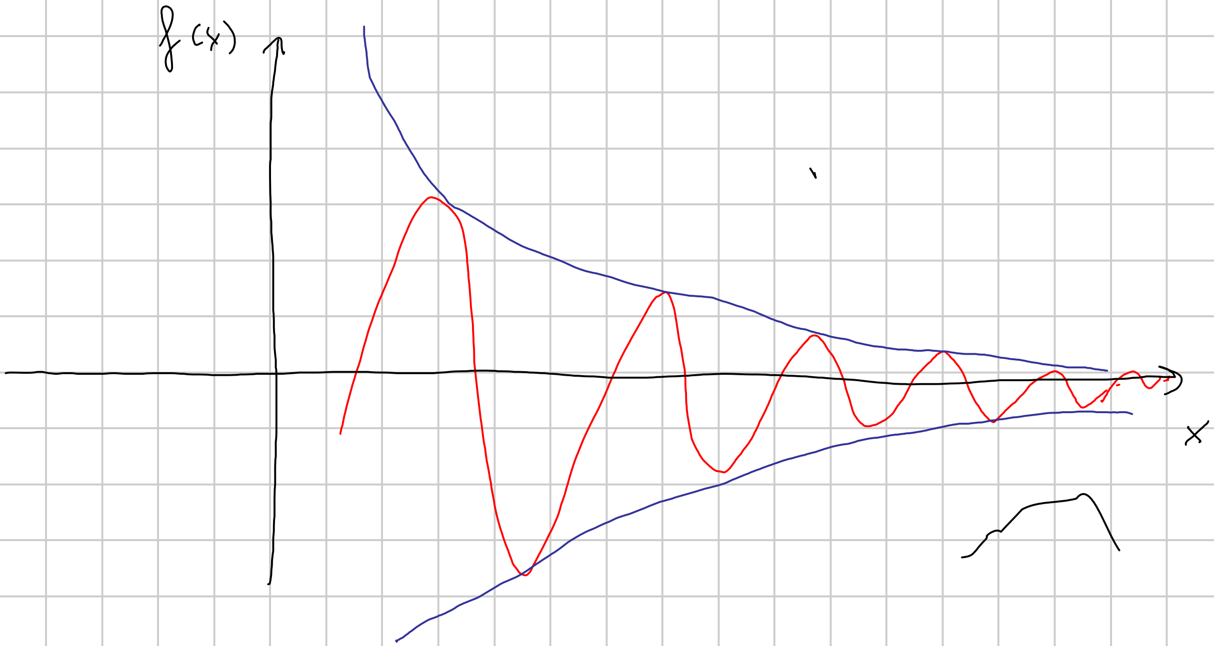
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ – asintoto orizz. $y = \frac{\pi}{2}$ $\quad x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$ – asintoto orizz. $y = -\frac{\pi}{2}$ $\quad x \to -\infty$



Es: $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale



- Asintoti verticali

Def: $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$
$\cap$
$\mathbb{R}$

Se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ si dice che f ha un

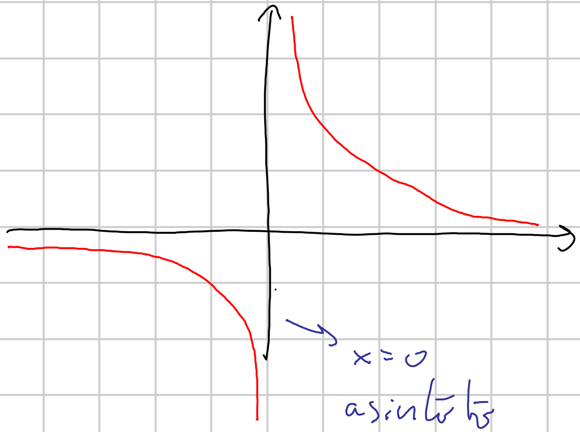
asintoto verticale di equazione $x = x_0$

(Lo stesso per $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$)

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$x = 0$ è un asintoto verticale per f, poiché

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$



Oss: Una funzione ha al massimo 2 asintoti orizzontali ma può avere anche ∞ asintoti verticali

Es: $f(x) = \operatorname{tg} x$

Asintoti obliqui:

Def: $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

pendenza dell'asintoto obliquo

Se esiste $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

e se esiste $\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = q \in \mathbb{R}$ allora

si dice che f ha un asintoto obliquo di equazione

$y = mx + q$

(stessa definizione a $-\infty$)

∘ Esempio:

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+2}{x-5}$$

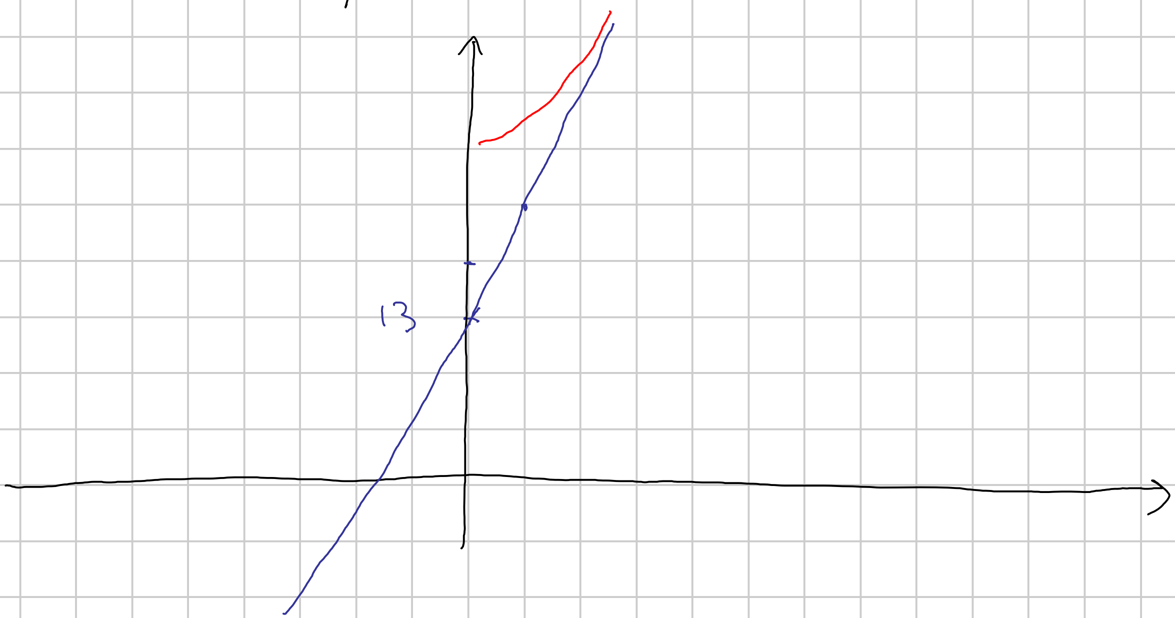
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x} = \underset{\substack{\shortparallel \\ m}}{2} \neq 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13 = q \rightarrow$$ termine noto nell'equazione dell'asintoto obliquo

La funzione $f(x)$ ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$

di equazione $y = 2x + 13$



Una funzione può avere al max 2 asintoti obliqui

(uno a $+\infty$, uno a $-\infty$)

Se f ha un asintoto orizz a $+\infty$ allora non ha un asintoto obliquo a $+\infty$ (e viceversa, uguale a $-\infty$).

Oss: Se f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ allora $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

Se $m > 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Se $m < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

Es: $f(x) = 3x + 5 \cdot \log x \qquad f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-\infty) = -\infty$$ Asintoto verticale in $x = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x + 5\log x = +\infty$$ → non c'è asintoto orizzontale

forse c'è asintoto obliquo

$$\underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5\log x}{x} = 3 \qquad m = 3}$$

Cerco di trovare q.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} 3\cancel{x} + 5\log x - 3\cancel{x} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Quindi f non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$

Derivazione

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ t.c. $x_0 \in A$.

Se esiste il limite

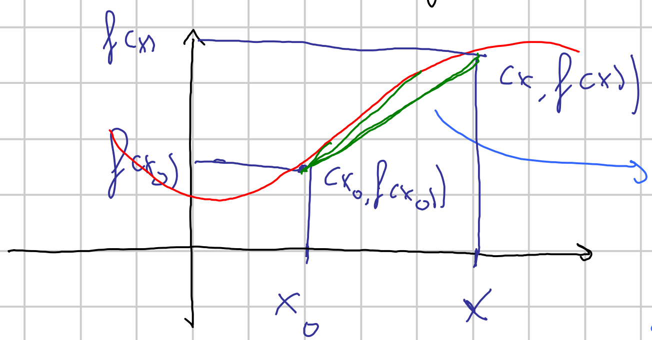
rapporto incrementale

$$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

allora ℓ si dice derivata della funzione f nel punto x_0.

Se $\ell \in \mathbb{R}$ (ℓ finito) si dice che f è derivabile in x_0.

La derivata si indica: $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$



il rapporto incrementale è la pendenza del segmento di estremi $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$

Oss: esistenza della derivata e derivabilità sono due cose diverse.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $f: [0, +\infty)$. Derivata in $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Quindi $f'(0) = +\infty$, ma f non è derivabile in 0.

Oss: Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Verifichiamo f è continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \left(f(x) - f(x_0) \right) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

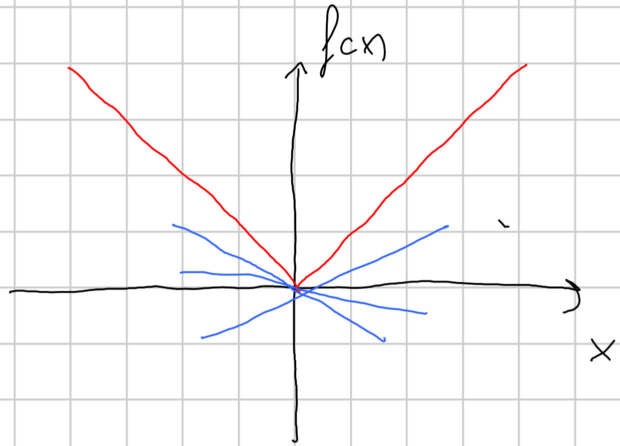
$$= \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{R}}}{f'(x_0)} \cdot 0 = 0 \quad \text{poiché } f'(x_0) = 0$$

Def: Se $\exists \lim_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ questo si dice <u>derivata destra</u> di f in x_0, e si indica con $f'_+(x_0)$

La derivata sinistra si indica con $f'_-(x_0)$

Oss: f è derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ e sono entrambe finite.

Es: $f(x) = |x|$



Calcoliamo derivati dx e sx in $x_0=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1.$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Quindi f non è derivabile in $x_0=0$ (derivati dx ~~e~~ sx non coincidono).

Oss: $f(x)=|x|$ è continua. Pertanto f continua $\not\Rightarrow$ f derivabile

Oss: f e' derivabile in x_0 se e solo se

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \overset{\text{derivata della } f \text{ in } x_0.}{f'(x_0)} \cdot (x-x_0)}_{\text{polinomio di 1° grado in } (x-x_0)} + \underbrace{o(x-x_0)}_{o(x-x_0)}$$

Infatti $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora

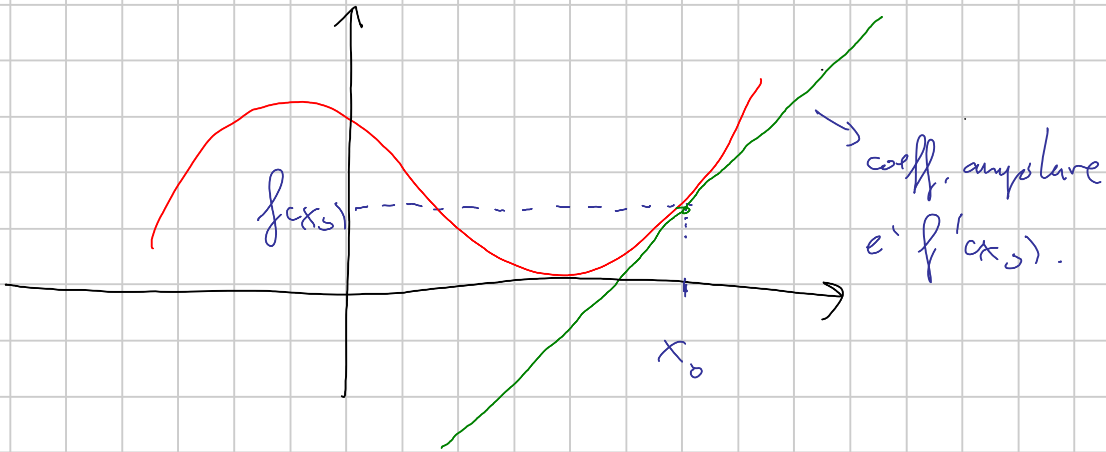
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0$$

allora $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$

$f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ è o-piccolo di $(x - x_0)$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$

Def: Se f è derivabile in x_0, allora la retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ si dice retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$. La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente.



Oss: $f: A \to \mathbb{R}$, supponiamo che f sia derivabile in ogni punto $x_0 \in A$. Allora possiamo costruire una nuova funzione $f': A \to \mathbb{R}$ t.c. in ogni punto $x \in A$

$f'(x)$ è la derivata di f calcolata in $x_0 = x$

Derivate successive:

Se la funzione f' è ancora derivabile, posso calcolare

$(f')' = f''$ - si chiama derivata seconda di f (si indica con f'').

Se possiamo continuare otteniamo

$f''', f^{(4)}, \dots, f^{(5)}$

In generale $f^{(k)}$ $k \in \mathbb{N}$ indica la derivata fatta k-volte

Per convenzione $f^{(0)} = f$