Lezione 24-09

$e = 2,713 \ldots$

$f(x) = e^x \quad f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

Inversa di $f(x) = e^x$ è il logaritmo naturale

$\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

Cambio di base per logaritmi:

$\log_a x = y$ y è l'esponente al quale devo elevare a per avere x

$a^y = x \rightarrow$ applichiamo il logaritmo naturale

$\log(a^y) = \log(x) \Rightarrow y \cdot \log(a) = \log x$

$\Rightarrow \log_a x \cdot \log a = \log x \Rightarrow \boxed{\log_a x = \frac{\log x}{\log a}}$

Più in generale $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ per ogni base c

$f(x) = x^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (ad esempio x^{π}, $x^{\sqrt{2}}$, ...)

Definiamo $x^{\alpha} \doteq e^{\alpha \cdot \log x}$

$e^{\alpha \log x} = \left(e^{\log x}\right)^{\alpha} = x^{\alpha}$.

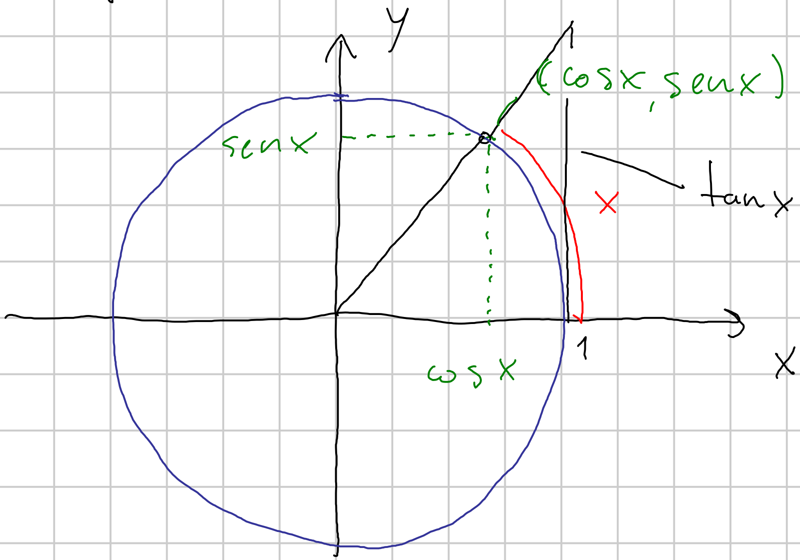
$f(x) = x^{\alpha} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $\left(\mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)\right)$

$(\alpha \in \mathbb{R})$

$x \to \log x \to \alpha \cdot \log x \to e^{\alpha \log x}$

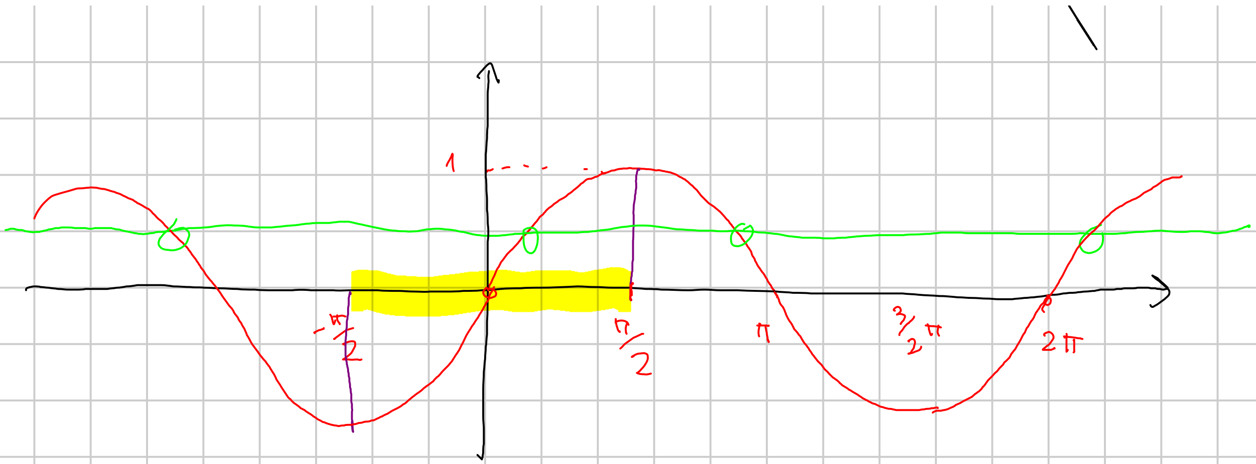
$x > 0$

Funzioni trigonometriche



$f(x) = \sin x$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$



$f(x) = \sin x$ è periodica di periodo 2π

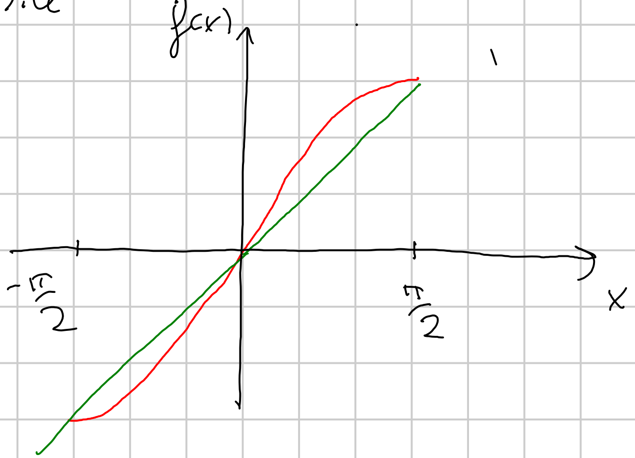
cioè $\boxed{f(x+2\pi) = f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}}$ (ad esempio $\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$

$f(x) = \sin x$ è invertibile NO (non è iniettiva)

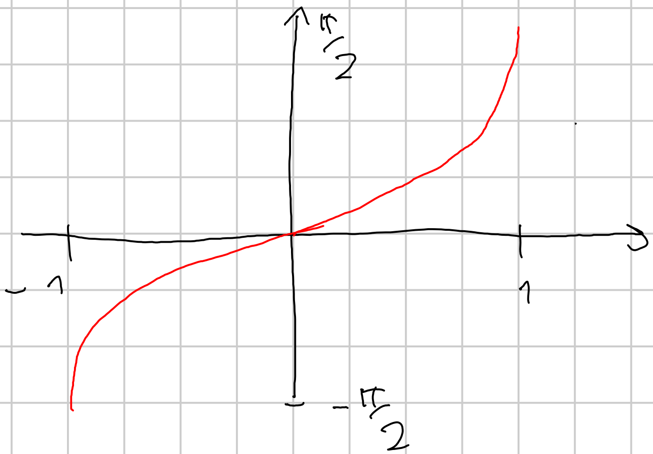
La restrizione di $f(x) = \sin(x)$ all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ è monotona crescente e quindi iniettiva. Su tale intervallo $f(x) = \sin x$ è quindi invertibile

$f(x) = \sin x$

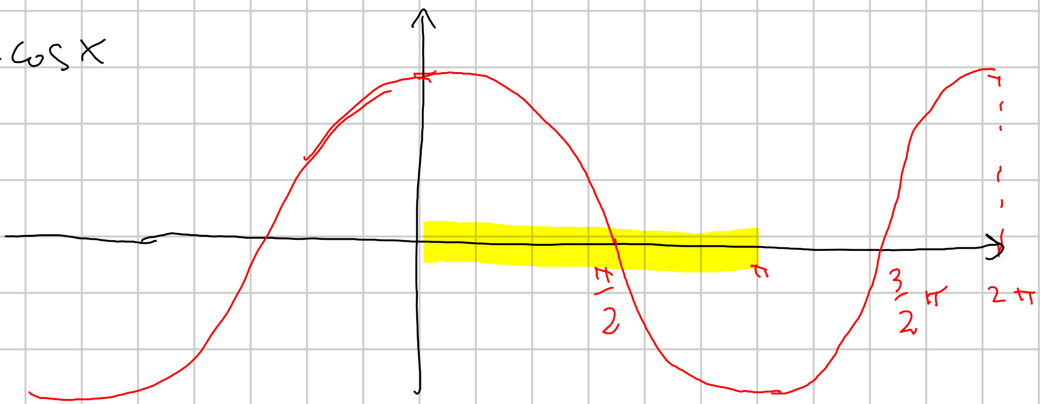


L'inversa di $f(x) = \operatorname{sen} x$ è la funzione

$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

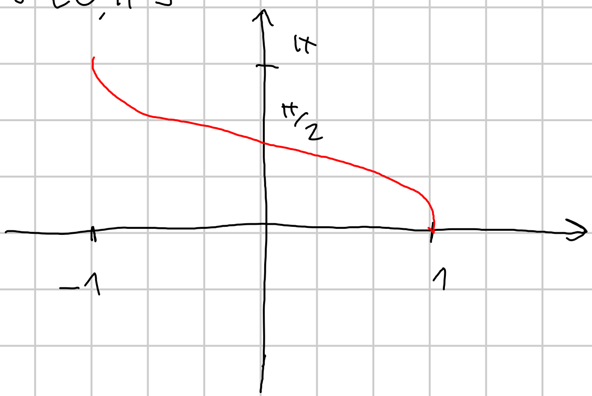


$f(x) = \cos x$



$f(x) = \cos x \quad f : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$

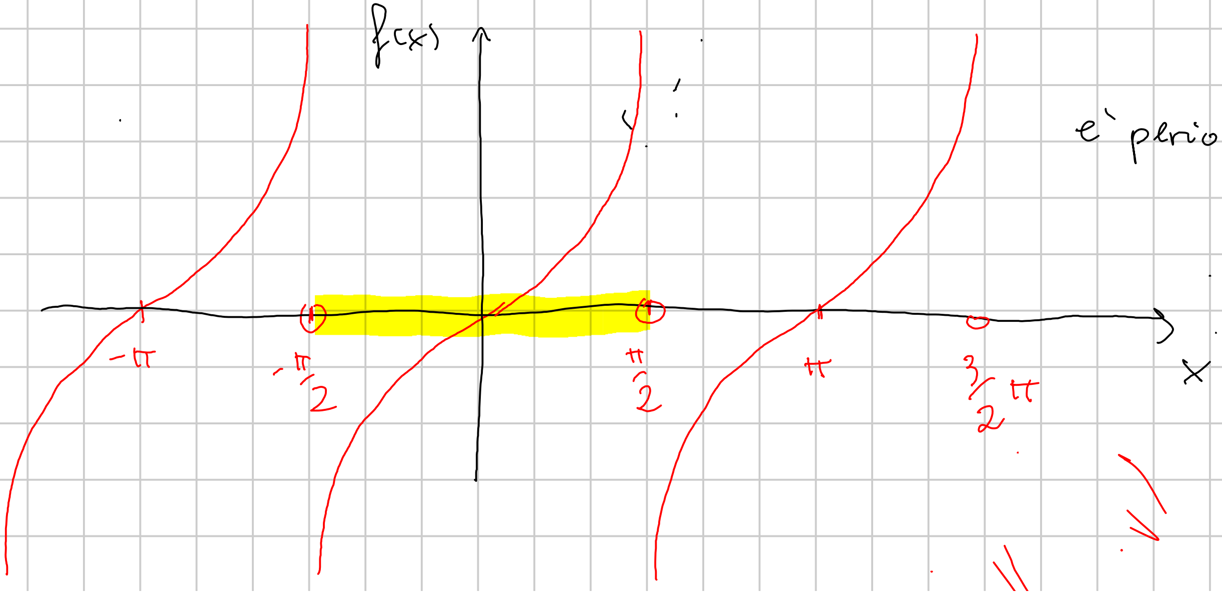


$\forall x \in \mathbb{R}$ vale che $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$f(x) = tg(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ e' definita solo se $\cos x \neq 0$.

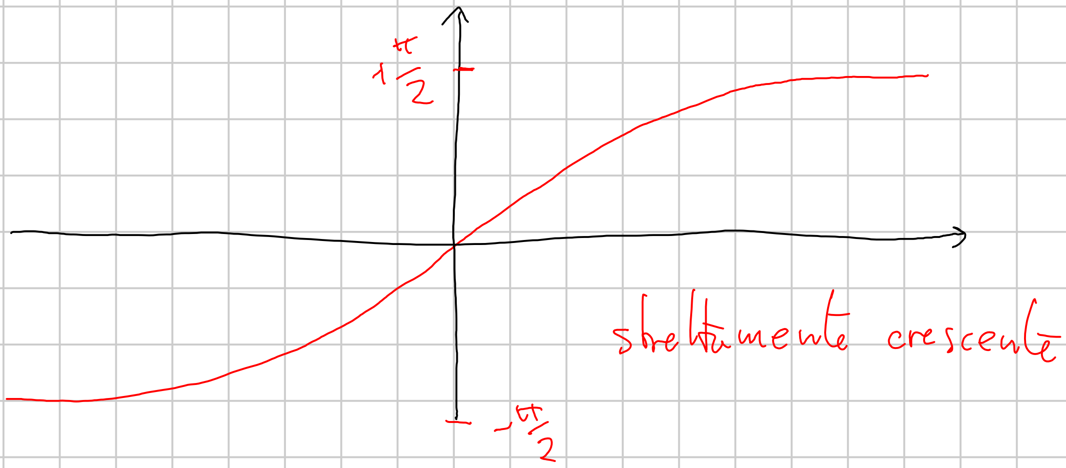
Non e' definita se $\cos x = 0$, cioe' se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

$f(x) = \tan x$ e' definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$



e' periodica

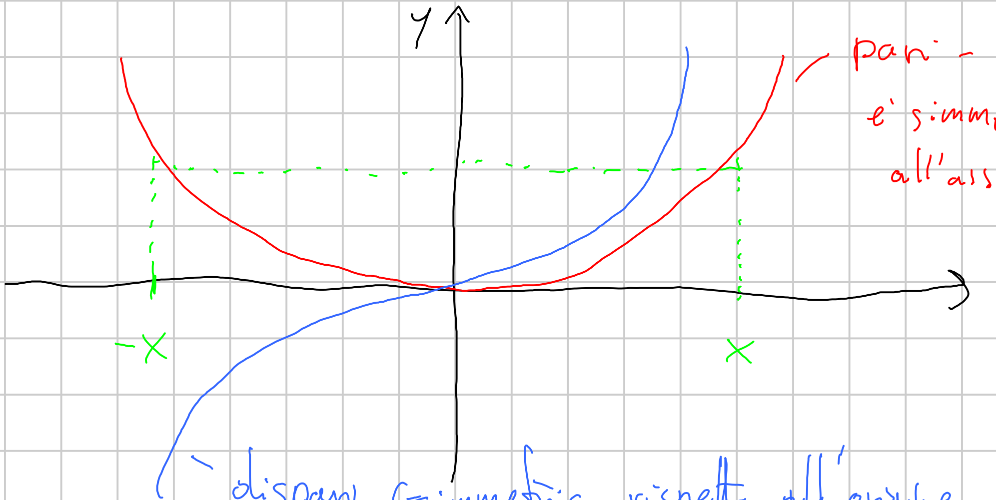
Inversa: $\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Def: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f si dice pari se

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice dispari se $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$



pari - il grafico è simmetrico rispetto all'asse y

dispari (simmetrica rispetto all'origine

$f(x) = x^2$

$\boxed{f(-x)} = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2 = \boxed{f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = x^3$

  $f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 \cdot x^3 = -1 \cdot x^3 = -x^3 = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \cos x$ è pari
- $f(x) = \sin x$ è dispari

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Un numero $m \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se: (1) $m \geq a \quad \forall a \in A$

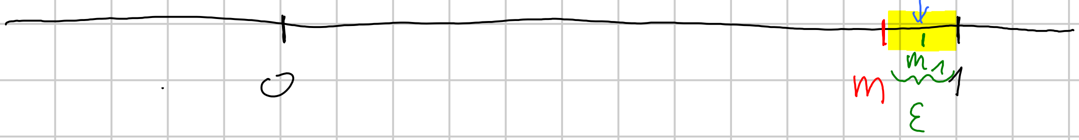
e

(2) $m \in A$

Esempio: $A = [0, 1] \quad \max(A) = 1$.

∘ $B = [0, 1)$ non ammette massimo.

Supponiamo che B abbia un massimo m.



ci sono elementi di B e sono maggiori di m assurdo!

Poniamo $\varepsilon = 1 - m > 0$

Poniamo $m_1 = m + \frac{\varepsilon}{2} > m$, inoltre $m_1 \in B$

B non ha massimo.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, dato $k \in \mathbb{R}$, k si dice <u>maggiorante</u> di A se $k \geq a \ \forall a \in A$

Dato A indichiamo con $\mathcal{M}_A = \{\text{maggioranti di } A\}$.

Es:

$A = [0,1]$ $\quad 2 \in \mathcal{M}_A$ SI $\quad \frac{1}{2} \notin \mathcal{M}_A$

$1 \in \mathcal{M}_A$ SI

$\mathcal{M}_A = [1, +\infty)$

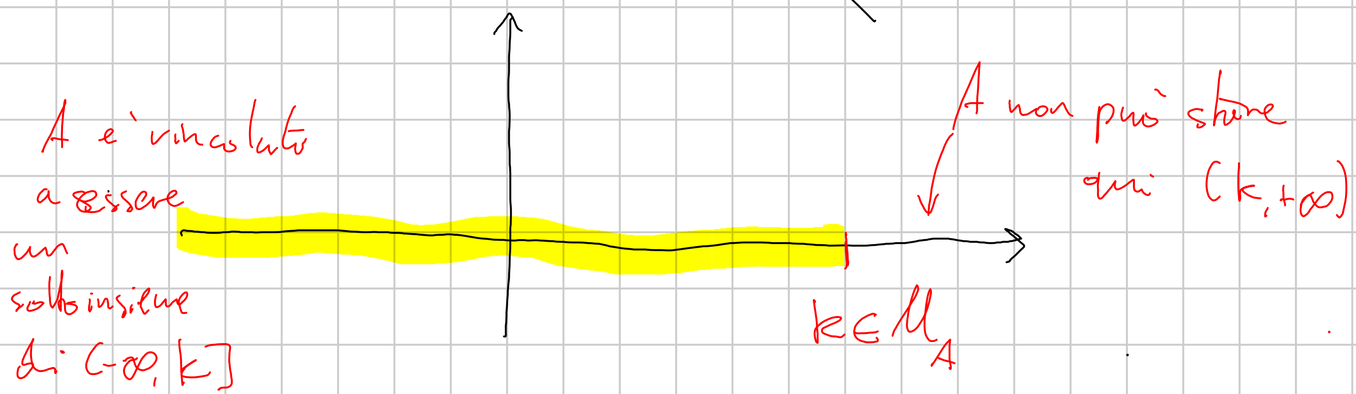
Oss: Se esiste un maggiorante per A, ne esistono infiniti.
Infatti se $m \in \mathcal{M}_A$, ogni $k \geq m$ è ancora un maggiorante.

Esempio: $A = \mathbb{R}$ non ha maggioranti.

$A = [3, +\infty)$ non ammette maggioranti.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ non ammettono maggioranti.

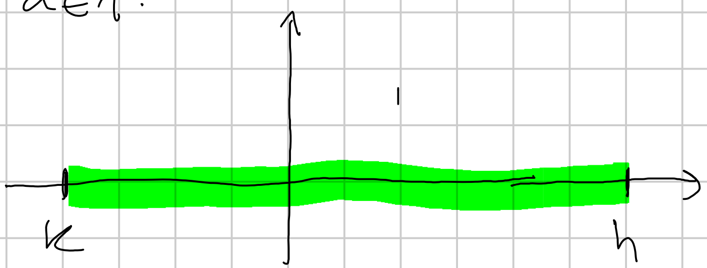
Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ se $M_A \neq \emptyset$ l'insieme A si dice <u>limitato superiormente</u>.



Definizioni analoghe per minimo, minorante e insieme inferiormente limitato.

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, se A è limitato sia superiormente che inferiormente, A si dice limitato.

Oss: A è limitato se e solo se $\exists\, k, h \in \mathbb{R}$ tali che $k \leq a \leq h \;\; \forall a \in A$.



Teorema: $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ superiormente limitato, allora esiste il minimo di $\mathcal{M}_A$.

Def: Il minimo dei maggioranti di A si dice <u>estremo superiore</u> di A e si scrive $\sup(A)$.

Se A è superiormente limitato $\Rightarrow$ A ha un estremo superiore

Es: $A = [0,1)$ $\quad \mathcal{M}_A = [1, +\infty)$ $\quad \sup(A) = 1$

$B = [0,1]$ $\quad \mathcal{M}_B = [1, +\infty)$ $\quad \sup(B) = 1$

Oss: Se $\exists \max(A)$, allora $\max(A) = \sup(A)$

Def: Definizione analoga per estremo inferiore ($\inf(A)$)

Def: Se A non è superiormente limitato, scriviamo
$\sup(A) = +\infty$.

Se A non è inferiormente limitato, scriviamo $\inf(A) = -\infty$.

Oss: $A \neq \emptyset$ superiormente limitato. $m = \sup(A)$
se e solo se valgono le seguenti condizioni:

1) $a \leq m \ \forall a \in A$ (m è un maggiorante)

2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{a} \in A$ t.c. $\bar{a} > m - \varepsilon$