Lezione 26-09

Retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$

in modo che valga: $-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$

pertanto se $x \in \mathbb{R}$ vale $-\infty < x < +\infty$

Oss: A è superiormente limitato $\Leftrightarrow \sup(A) < +\infty$.

Operazioni con $\pm\infty$:

1) Se $x \neq +\infty$ ($x \in \mathbb{R}$ oppure $x = -\infty$)

$x + (-\infty) = -\infty$ $(-\infty + (-\infty) = -\infty)$

2) Se $x \neq -\infty$ allora $x + (+\infty) = +\infty$

Attenzione $+\infty + (-\infty)$ non è definita.

3) Se $x > 0$ allora $x \cdot (+\infty) = +\infty$

$x \cdot (-\infty) = -\infty$

4) Se $x < 0$ allora $x \cdot (-\infty) = +\infty$

$x (+\infty) = -\infty$

$0 \cdot (+\infty) = ?$
$0 \cdot (-\infty) = ?$ $\Big\}$ Queste operazioni non hanno senso (per ora).

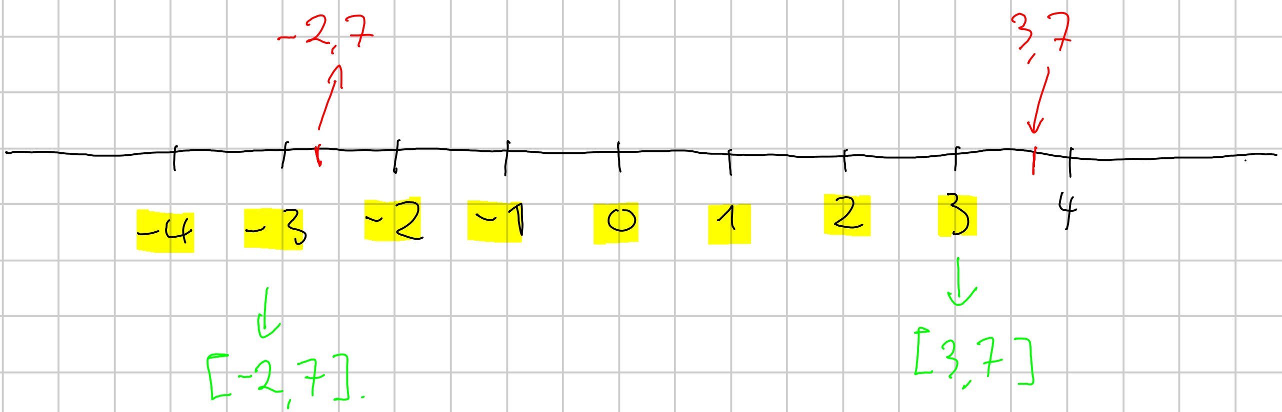
Operazioni valide
$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$
$$(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$$
$$(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

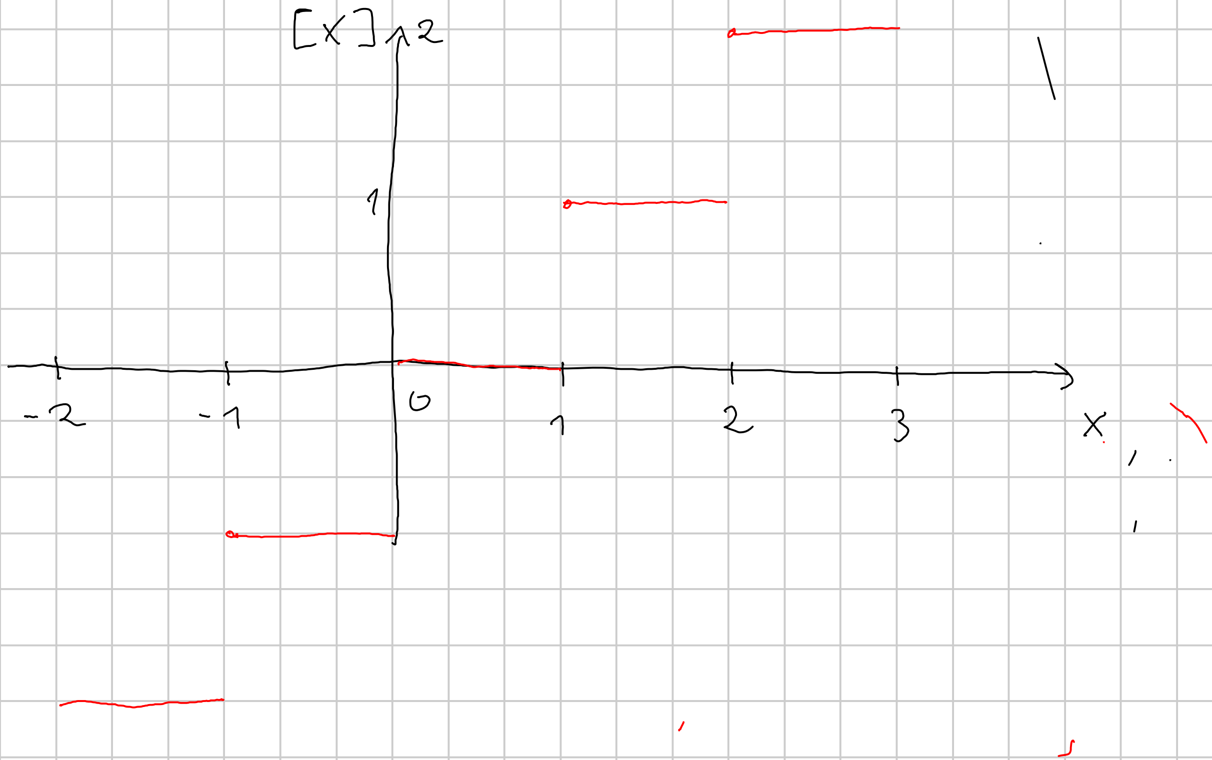
Oss: Dato $A \subset \mathbb{Z}$, se A è superiormente limitato, allora A ha massimo, se A è inferiormente limitato, allora A ha minimo. (Falso se $A \subset \mathbb{Q}$ o $A \subset \mathbb{R}$).

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice <u>parte intera</u> di x

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}.$$

$$\left[\frac{37}{10}\right] = 3 \qquad \left[-\frac{27}{10}\right] = -3$$





[x]
2
1
-2
-1
0
1
2
3
x

Def: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

a) f si dice limitata superiormente se $Im(f) = f(A)$ è limitato superiormente. (Analoga definizione di funzione limitata inferiormente, limitata).

b) f ha massimo se $f(A) = Im(f)$ ha massimo.

Se $M = \max(f(A))$ M si dice il massimo di f.

(Analoga def. per minimo di f).

c) $\sup(f) = \sup(f(A))$. Se f non è limitata superiormente si scrive $\sup(f) = +\infty$ (uguale per $\inf(f)$)

d) Se f ha massimo M, ogni $x_0 \in A$ t.c. $f(x_0) = M$ si dice punto di massimo per f.

Oss: Il massimo di f è unico, il punto di massimo potrebbe non esserlo.

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$ $\max(f) = 1$

$\min(f) = -1$

$\mathrm{Im}(f) = [-1, 1]$

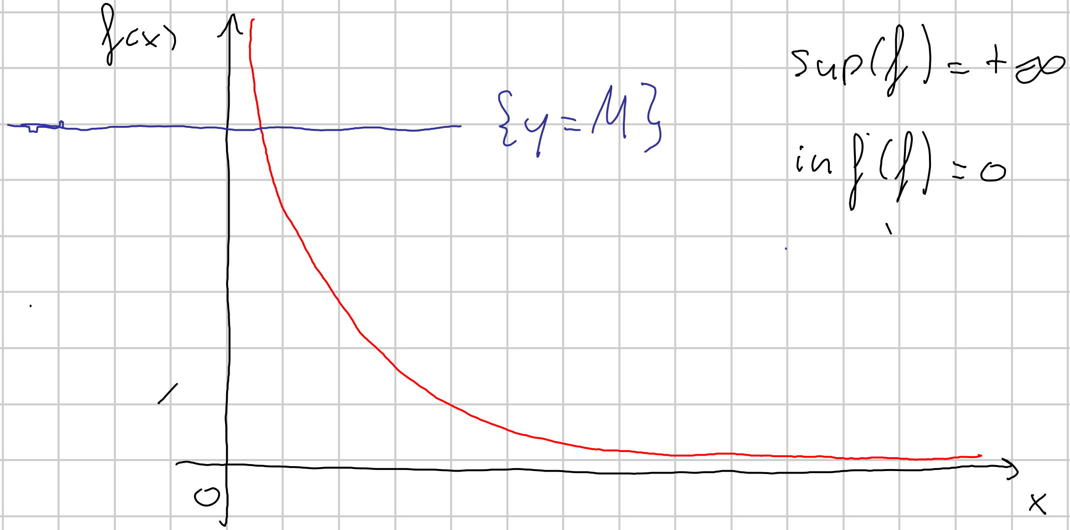
Punti di massimo: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\to$ sono infiniti.

Punti di minimo: $\left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ \forall k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Es: $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad \mathrm{Im}(f) = (0, +\infty)$

$\sup(f) = +\infty$

$\inf(f) = 0$

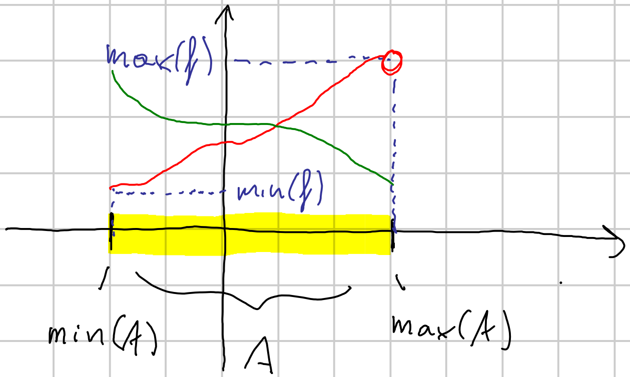


f non ha minimo.

Oss: $A \subset \mathbb{R}$ $\quad f: A \to \mathbb{R}$

a) Se A ha massimo e f è debolmente crescente

$\Rightarrow$ f ha massimo e $\max(f) = f(\max(A))$.



b) Se A ha minimo e f è debolmente crescente

$\Rightarrow f$ ha minimo e $\min(f) = f(\min(A))$

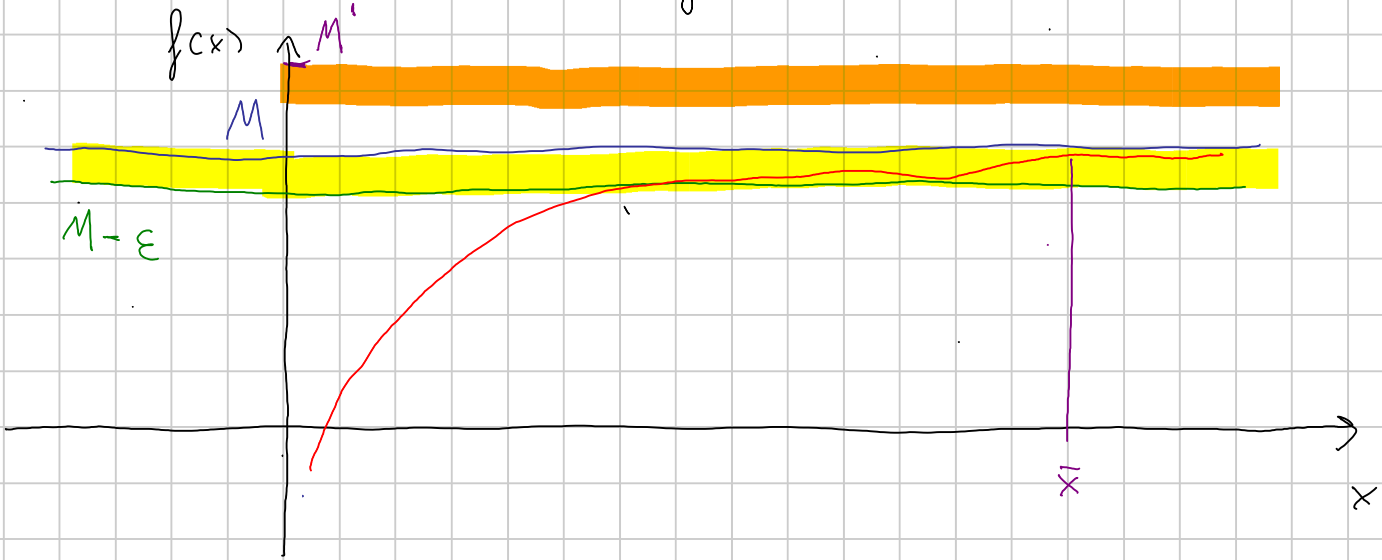
c) Se A ha max e f è debolmente decrescente, allora f ha minimo e $\min(f) = f(\max(A))$

d) Se A ha minimo e f è debolmente decrescente, allora f ha max e $\max(f) = f(\min(A))$

Oss: $f: A \to \mathbb{R}$, e $M = \sup(f)$ se e solo se

① $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$] = a dire che M è maggiorante per $\mathrm{Im}(f)$.

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{x} \in A$ t.c. $f(\bar{x}) > M - \varepsilon$



Valore assoluto

Def: Dato $x \in \mathbb{R}$ si dice valore assoluto di x

$$|x| = \max\{-x, x\}$$

$$\left(|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \right)$$

$|0| = 0$

$|\pi| = \pi$

$|-15| = 15$

Proprietà:

1) $x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $|x| = x$ se $x \geq 0$

$|x| = -x$ se $x \leq 0$

3) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

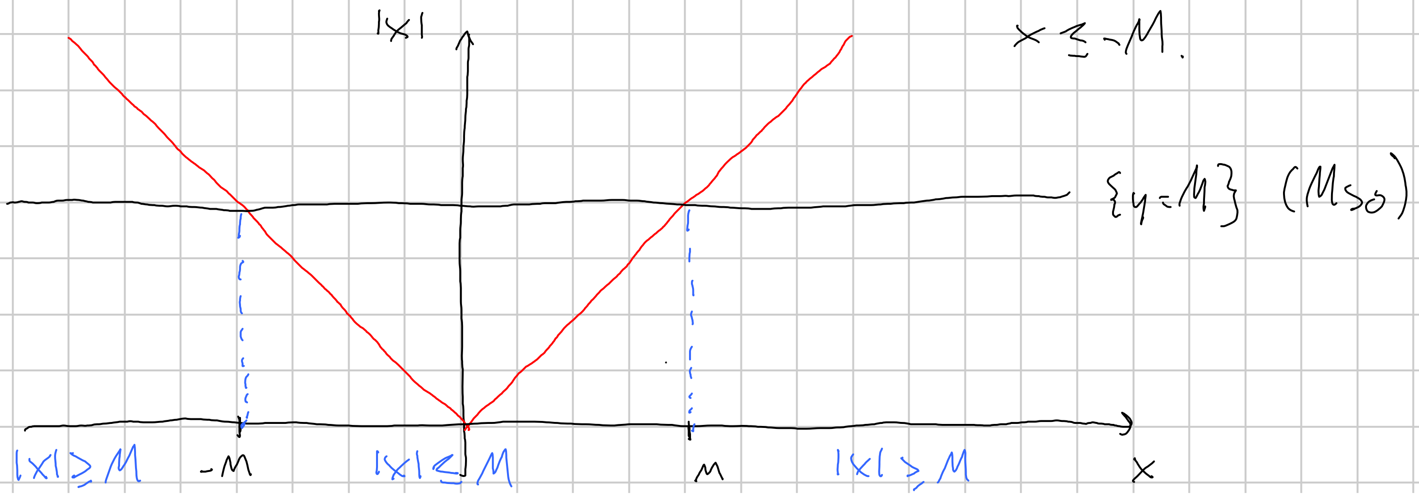
4) $|x| = 0 \iff x = 0$

5) $|-x| = |x|$

6) $-|x| \leq x \leq |x|$

7) $|x| \leq M$ se e solo $-M \leq x \leq M$

8) $|x| \geq M$ se e solo se $x \geq M$ oppure $x \leq -M$.



$|x| \geq M \iff x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$

Se $M < 0$ $\{|x| \geq M\} = \mathbb{R}$ $|x| \geq M \ \forall x \in \mathbb{R}$

$|x| < M = \emptyset$

Disuguaglianza triangolare:

Dati $a, b \in \mathbb{R}$, risulta che

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$||a| - |b|| \leq |a-b|$

Osservazione

$|a+b+c| \leq |a+b| + |c|$

$\leq |a| + |b| + |c|$

Def: L'insieme di definizione di una funzione è il più grande sottoinsieme di $\mathbb{R}$ dove le operazioni descritte in f hanno senso.

Esempio: L'insieme di definizione di $f(x) = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$

Es: $f(x) = \log x$ è definita in $(0, +\infty)$

- $f(x) = \log(x^2)$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $f(x) = 2 \cdot \log(x)$ è def. in $(0, +\infty)$

  $\log(x^2) = 2 \cdot \log x \quad \forall x > 0$

Se $x<0 \Rightarrow -x>0$

$\log(x^2) = \log((-x)^2) = 2 \cdot \log(-x)$

Pertanto $\log(x^2) = 2 \cdot \log(|x|) \quad \forall x \neq 0$

- $\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- $e^{\log x} = x \quad \forall x > 0$

- $\sin(\arcsin x)$

  e' def. su $[-1,1]$

$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$

$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(\sin x) = ?$ È definita $\forall x \in \mathbb{R}$.