Lezione 28-11

Def: Se $b < a$ definiamo

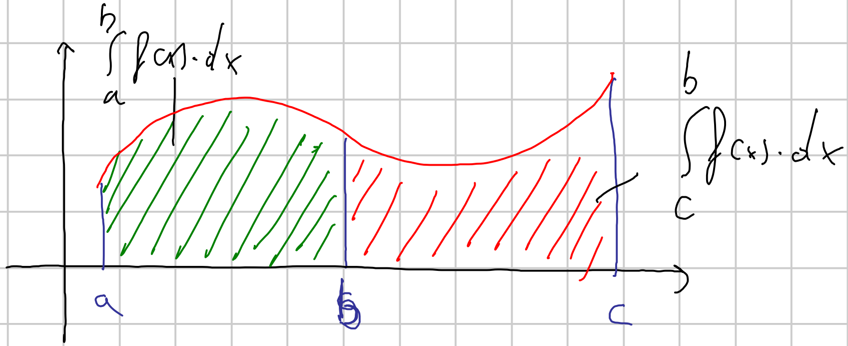
$$\int_a^b f(x) \cdot dx = - \int_b^a f(x) \cdot dx$$ e anche

$$\int_a^a f(x) \cdot dx = 0$$

Es: $$\int_5^3 x^2 \cdot dx = - \int_3^5 x^2 \cdot dx$$

Osservazione: $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_a^c f(x)\cdot dx + \int_c^b f(x)\cdot dx$

vale ancora se $a<b<c$? SI



$$\int_c^b f(x)\cdot dx = -\int_b^c f(x)\cdot dx$$

Oss: La media integrale ha senso anche a estremi scambiati

Se $b < a$

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \cdot dx = \frac{1}{a-b} \cdot \int_b^a f(x) \cdot dx$$

Def: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

Una funzione $F: I \to \mathbb{R}$ si dice una <u>primitiva</u> di f

se F è derivabile e $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Es: $f(x) = 2x \qquad F(x) = x^2$, <u>$F$ è una</u> <u>primitiva</u> di f.

Non è unica. $G(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ costante

$G'(x) = 2x = f$. G è un'altra primitiva.

Se esiste una primitiva ne esistono infinite.

Oss: Due primitive di una funzione f differiscono sempre per una costante additiva.

dim: Se F e G sono primitive di f, allora $F' = f$, $G' = f$

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$$

F e G sono continue e definite su un intervallo, allora $F-G$ è una costante, cioè $F = G + k \quad k \in \mathbb{R}$

Def: L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si dice integrale indefinito di f e si indica con

$$\int f(x) \cdot dx$$

senza estremi di integrazione.

Non è una funzione singola, bensì una famiglia di funzioni

$$\int f(x) \cdot dx = \{ F : F' = f \}.$$

Es: $\int 2x \cdot dx = \{ x^2 + k : k \in \mathbb{R} \}$

Generalmente si abbrevia con:

$$\int 2x \cdot dx = x^2 + k$$

L'integrale di Riemann invece rappresenta un'area (quindi un numero reale) e si dice <u>integrale definito</u>

$$\int_a^b f(x) \cdot dx$$

con gli estremi di integrazione

Es: $\int e^x \cdot dx = e^x + k$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x + k$$

$$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \cdot dx = \arctan x + k$$

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \log|x| + k$$

Infatti: se $x > 0$ $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

Se $x < 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} \log|x| = \frac{d}{dx} \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$$\int x^n \cdot dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad \text{se } n \neq -1 \quad n \in \mathbb{N}$$

Es: $\int x^3 \cdot dx = \frac{1}{4} x^4 + k$

In generale $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

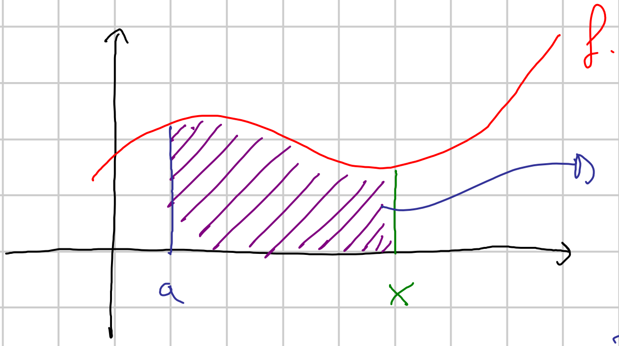
Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $a \in I$ punto qualsiasi.

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

Allora la funzione $F(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$ – è effettivamente una funzione $F: I \to \mathbb{R}$

è una primitiva di f.

Corollario: le funzioni continue hanno primitive.



$F(x)$ = area del sottografico di f tra a e x

Dim: Devo far vedere che F è derivabile e che $F' = f$.

Fisso $x_0 \in I$ arbitrario e calcolo il rapporto incrementale di F in x_0:

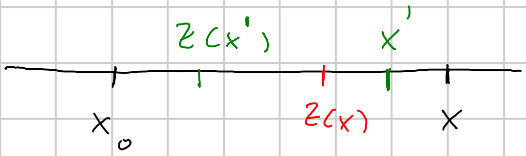
$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\cdot\Big(\underbrace{\int_a^x f(t)\cdot dt}_{F(x)} - \underbrace{\int_a^{x_0} f(t)\cdot dt}_{F(x_0)}\Big) =$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\cdot\Big(\int_a^x f(t)\cdot dt + \int_{x_0}^a f(t)\cdot dt\Big) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\cdot dt$$

media integrale di f sull'intervallo di estremi x_0 e x.

• f è continua, quindi per il teorema della media integrale esiste $z(x)$ compreso tra x_0 e x tale che:

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\cdot dt = f(z(x))$$



$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z(x))$$

Cambio di variabile: scrivo $y = z(x)$.

A quanto tende y se $x \to x_0$? Poiché $y = z(x)$ è compreso tra x e x_0, per il teorema dei carabinieri $\lim_{x\to x_0} y = \lim_{x\to x_0} z(x) = x_0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(z(x)) = \lim_{y\to x_0} f(y) = f(x_0)$$

↳ poiché f è continua

Quindi $$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

F è derivabile, $F' = f$, quindi F è una primitiva di f.

Teorema di Torricelli:

$f: I \to \mathbb{R}$ continua, I intervallo. $a \in I$ fissato.

Se G è una primitiva di f, allora $\exists\, k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$G(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)\cdot dt + k$$, e per ogni $\alpha, \beta \in I$ risulta

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\cdot dt = G(\beta) - G(\alpha) = \left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta}$$

Notazione $\left[G(x)\right]_{\alpha}^{\beta} = G(\beta) - G(\alpha)$

Es: $\int_{1}^{3} x \cdot dx$. Una primitiva di $f(x) = x$ e'

$$G(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{1}^{3} x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$

Se avessi scelto come primitiva $F(x) = \frac{x^2}{2} + 7$

$$\left[\frac{x^2}{2}+7\right]_1^3 = \left(\frac{9}{2}+\cancel{7}\right) - \left(\frac{1}{2}+\cancel{7}\right) = 4$$

Integrali con estremi variabili

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua

$A \subset \mathbb{R}$, $\alpha: A \to I$, $\beta: A \to I$ derivabili

Definiamo $G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t) \cdot dt$ – è una funzione in x.

Allora G è derivabile e

$$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

Caso particolare: $\beta(x) = x$, $\alpha(x) = \alpha$ costante

$$G(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t) \cdot dt$$

$$G'(x) = f(x) \cdot 1 - f(\alpha) \cdot 0 = f(x)$$

Esempio: $G(x) = \int_{x^2}^{\sin x} e^t \cdot \arctan t \cdot dt$

Calcolare $G'(x)$

Poniamo

$f(t) = e^t \cdot \arctan t$

$\beta(x) = \sin x$

$\alpha(x) = x^2$

$G'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x) =$

$= e^{\sin x} \cdot \arctan(\sin x) \cdot \cos x - e^{x^2} \cdot \arctan(x^2)\, 2x$

Es: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} e^t \cdot \arctan t \cdot dt}{\sin(x^4)} = \dfrac{\int_0^0 e^t \cdot \arctan t \cdot dt}{0} = \dfrac{0}{0}$

Uso de l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overset{\nearrow 1}{e^{x^2}} \cdot \arctan(x^2) \cdot 2x - \cancel{e^0 \cdot \arctan 0 \cdot \overset{\alpha'}{0}}}{\underset{\searrow 1}{\cos(x^4)} \cdot 4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2) \cdot \cancel{x}}{2\cancel{x^3}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x^2)}{2x^2} = \frac{x^2 + o(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Integrazione per parti

$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f continua, g sia di classe C^1 (g si dice di classe C^1 se g è derivabile e g' è continua).

Se F è una primitiva di f, allora

$$\int f \cdot g \cdot dx = F \cdot g - \int F g' \cdot dx$$

dim $(F g)' = F' g + F g' = f \cdot g + F g'$

integro questa uguaglianza:

$$\int (Fg)' \cdot dx = \int f \cdot g \cdot dx + \int F g' \cdot dx$$

$$F g = \int f \cdot g \cdot dx + \int F g' \cdot dx$$

$$\Rightarrow \int f \cdot g \cdot dx = F \cdot g - \int F g' \cdot dx$$

$f(x) = \sin x, \quad g(x) = x$

$F(x) = -\cos x \quad g'(x) = 1$

Es: $\int x \cdot \sin x \cdot dx$

$$= F \cdot g - \int F \cdot g' \cdot dx$$

$$= -x \cdot \cos x - \int -\cos x \cdot 1 \cdot dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx =$$

$$-x \cdot \cos x + \sin x + k.$$

$F = x$

$g' = \frac{1}{x}$

Es: $\int \log x \cdot dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\log x}_{g} \cdot dx$

$= F \cdot g - \int F \cdot g' \cdot dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \log x - \int 1 \cdot dx =$

$x \log x - x + k$

$F = \sin x$

$g' = -\sin x$

Es: $\int \cos^2 x \cdot dx = \int \underbrace{\cos x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g} \cdot dx =$

$= F \cdot g - \int F \cdot g' \, dx = \sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x =$

$\sin x \cos x + \int 1 - \cos^2 x \, dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \cdot dx$

$$\boxed{\int \cos^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x \cdot dx}$$

$$\underline{2 \int \cos^2 x \cdot dx = \sin x \cdot \cos x + x} \Rightarrow \int \cos^2 x \cdot dx = \frac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + \underline{k}$$