Lezione 29-10

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$ t.c. f e' derivabile in x_0. Allora

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) = \arctan(x) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(0) = 1$$

$$\arctan x = \underset{f(0)}{0} + \underset{f'(0)}{1} \cdot x + o(x) = x + o(x) \quad \text{per } x \to 0$$

Prop: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ debolmente crescente in A.

Se f è derivabile in un punto $x_0 \in A \Rightarrow f'(x_0) \geq 0$.

Se f è debolmente decrescente, e derivabile in $x_0 \in A \Rightarrow f'(x_0) \leq 0$

dim: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Poiché f è deb. crescente.

mantiene l'ordinamento, pertanto $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ in un intorno

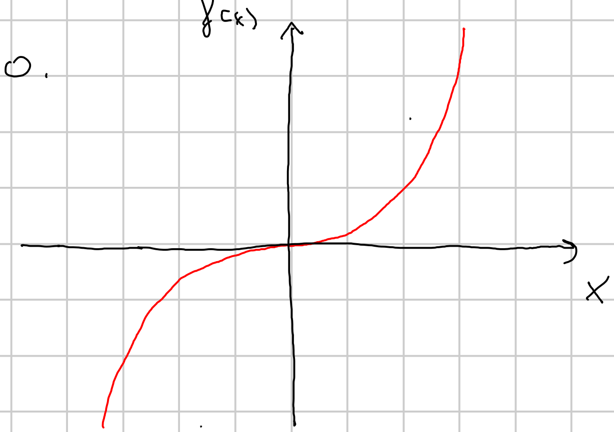
di x_0 (con x_0 escluso), quindi $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$

Oss: Se f è strettamente crescente, posso solo dedurre che $f'(x_0) \geq 0$ (non che $f'(x_0) \underset{\neq}{>} 0$).

Es: $f(x) = x^3$ $f'(x) = 3 \cdot x^2$.

f è strettamente crescente su $\mathbb{R}$. $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Però $f'(0) = 0$.

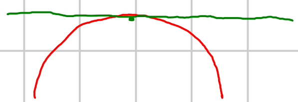


Teorema di Fermat:

$f: A \to \mathbb{R}$. Se $x_0 \in \text{int}(A)$ (interno ad A). $\to \exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $U \subset A$.

e x_0 è un punto di massimo o minimo locale

e f sia derivabile in $x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.



Dim: Poiché f è derivabile in $x_0 \Rightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ - sono entrambe finite

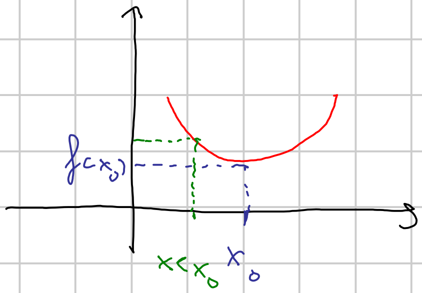
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Supponiamo x_0 sia un punto di minimo locale

Se x è $> x_0$ (e sufficientemente vicino a x_0)

allora $f(x) > f(x_0)$,

pertanto, $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$



quindi $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\geq 0}} \geq 0.$

$f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\geq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{\leq 0}} \leq 0$

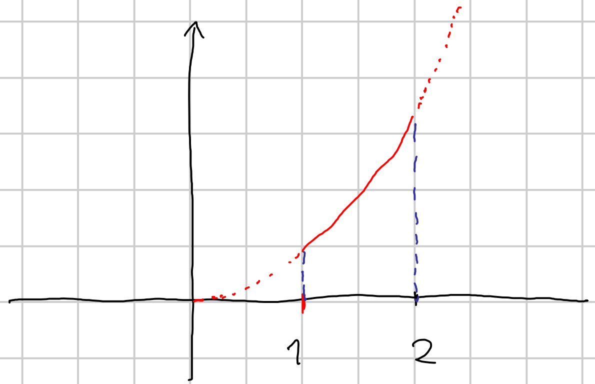
Segue $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0$

$\Downarrow$

$f'(x_0) = 0$

Oss: Se il punto x_0 non è interno il teorema non è valido.

Es: $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$



$f'(x) = 2x \underset{\neq}{>} 0$

$\forall x \in [1,2]$.

1 è punto di minimo

2 è punto di massimo

1 non è punto interno di $A \in [1,2]$

2 non è punto interno di A.

Se i punti di max e min locale non sono interni (sono negli estremi) non è detto che $f'(x)=0$

In generale questo è un criterio per cercare eventuali max e min locali interni ad A.

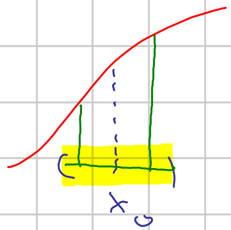
Es: $f(x) = |x|$ $\min(f) = f(0) = 0$. ma f non è derivabile in 0

Es: $f(x) = \sqrt{|x|}$ - minimo globale in 0

Oss: Il teorema di Fermat è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'esistenza di un minimo o massimo locale.

Es: $f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$, però 0 non è

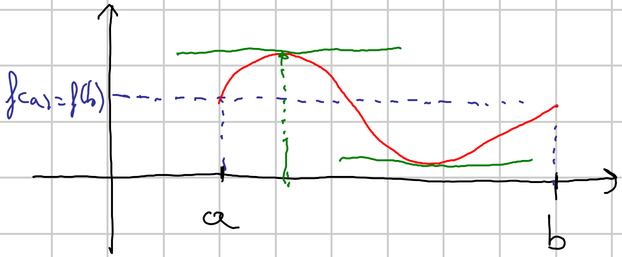
un punto di max o min. locale per la funzione f.



Teorema di Rolle

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$, derivabile in

(a,b) e $f(a) = f(b)$, allora $\exists\ c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$

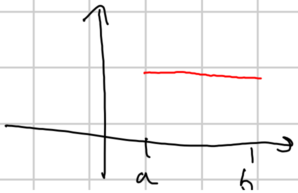


Dim: Per il teorema di Weierstrass f ha max e min su $[a,b]$. Siano x_1, x_2 punti t.c. $f(x_1) = \min(f)$, $f(x_2) = \max(f)$

1) x_1 e x_2 sono entrambi agli estremi di $[a,b]$, cioè

$x_1 = a$, $x_2 = b$, ma $f(a) = f(b) \Rightarrow \max(f) = \min(f) \Rightarrow$

f è costante su $[a,b] \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$



2) Almeno uno dei due punti x_1 o x_2 è interno

ad (a,b) $\underset{\text{applichiamo teo di Fermat}}{\Rightarrow}$ $f'(x_1)=0$ oppure $f'(x_2)=0$ $\Rightarrow$ $c=x_1$ oppure $c=x_2$

$\rightarrow$ abbiamo trovato $c \in (a,b)$ tale che $f'(c)=0$.

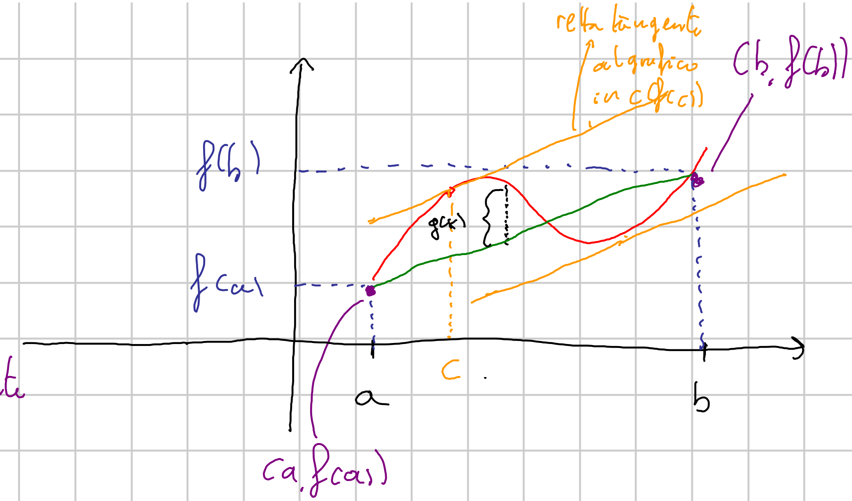
Teorema di Lagrange

$f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile

in $(a,b) = \mathrm{int}([a,b])$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$f'(c) = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

coeff. angolare della retta contenente $(a, f(a)), (b, f(b))$



Dim: Definiamo $r(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$ per $x \in [a,b]$

$r : [a,b] \to \mathbb{R}$. Notare che $r(x)$ è derivabile $\forall x \in (a,b)$ e

$r'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$r(a) = f(a)$ $r(b) = f(b)$, pertanto il grafico di r è proprio il segmento.

di estremi $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$

Definiamo $g(x) = f(x) - r(x)$.

g è continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), $g(a) = f(a) - r(a) = 0$.

$g(b) = f(b) - r(b) = 0 \Rightarrow g(a) = g(b) = 0$.

Applichiamo il teorema di Rolle a $g(x)$.

$\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$.

Ma $g'(c) = f'(c) - r'(c) \Rightarrow f'(c) = r'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Teorema: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, f continua su I e derivabile in $int(I)$.

1). Se $f'(x) = 0 \ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è costante su I.

2) Se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è deb crescente su I

3) Se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è deb decrescente su I.

4) Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è strettamente crescente su I.

5) Se $f'(x) < 0 \ \forall x \in int(I) \Rightarrow f$ è strettamente decrescente.

dim 4). Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

dobbiamo mostrare che $f(x_1) < f(x_2)$.

Notiamo $(x_1, x_2) \in \text{int}(I)$. Applico il teorema di

Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ t.c.

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$f'(c) > 0$ per ipotesi.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{\underbrace{x_2 - x_1}_{>0}} > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$$

Oss: f deve essere definita su un intervallo (affinché valga il teorema precedente).

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f : \underbrace{(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}_{\text{non è un intervallo}} \to \mathbb{R}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ però f non è strettamente decrescente nel suo dominio

Però è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$

Esempio: $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

derivata di $\frac{1}{x}$

$\Rightarrow f$ è costante in $(0,+\infty)$. Quanto vale la costante?

Per calcolarla posso (① o fare il limite a $+\infty$)

oppure calcolarla in un punto qualsiasi:

Ad esempio $f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

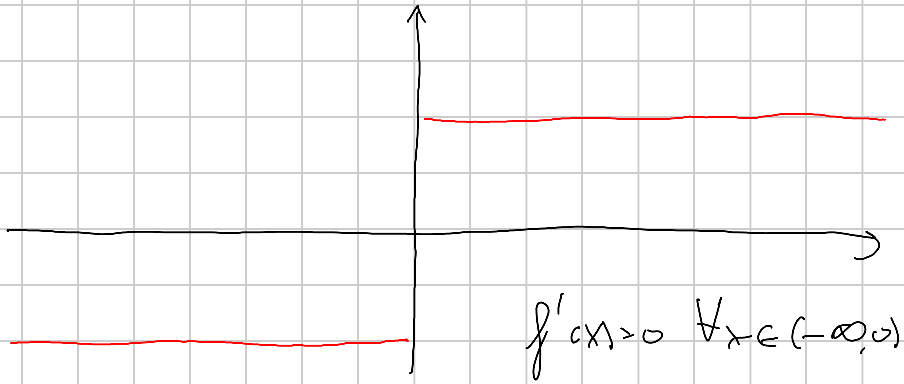
$$\Rightarrow \boxed{\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{se } x>0}$$

Se $x<0 \Rightarrow f$ è costante anche su $(-\infty, 0)$, ma la costante è diversa.

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\arctan x}_{-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arctan\frac{1}{x}}_{0}$$

Se $x<0$ $\boxed{\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \arctan x}$

$f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ $\quad f : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$



$f'(x) = 0 \quad \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

ma f non è costante su tutto il suo dominio (che non è un intervallo).

Ma f è costante su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$