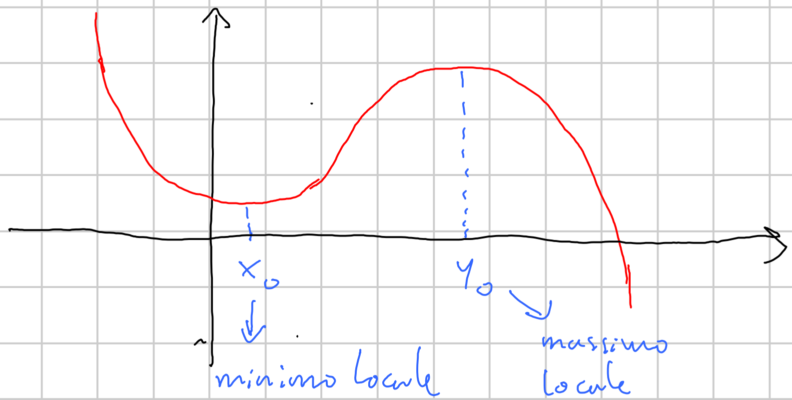
Lezione 3-10

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in A$ si dice punto di minimo locale (o relativo) se $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall x \in A$ t.c. $|x - x_0| < \delta$ vale $f(x) \geq f(x_0)$.

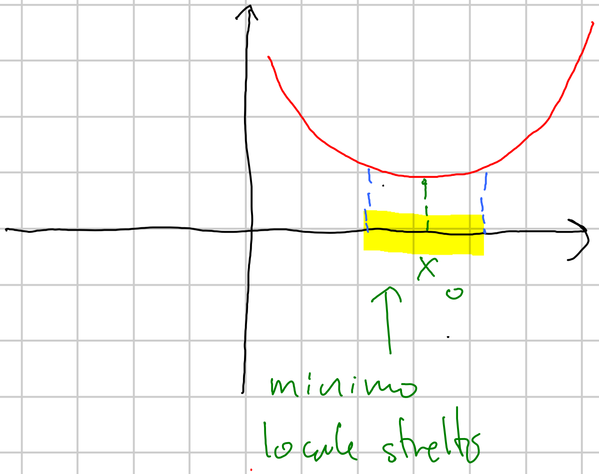
Identica nozione per punto di massimo locale ($f(x) \leq f(x_0)$)

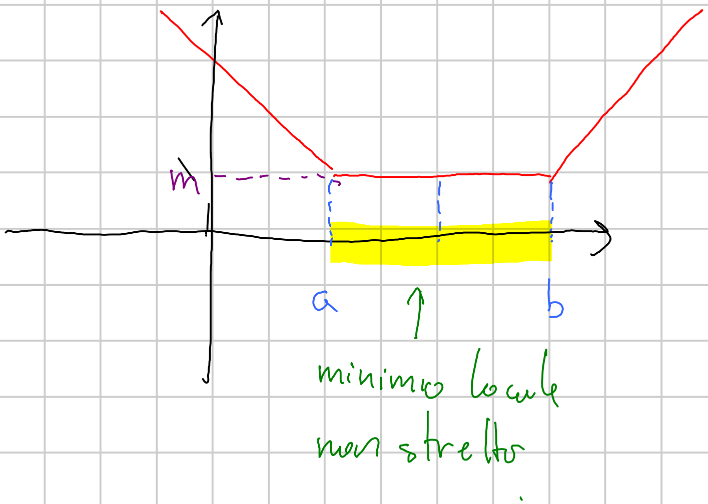


Minimo globale è anche minimo locale

Un punto di minimo locale x_0 si dice di minimo locale stretto se

$f(x) \underset{\neq}{\geq} f(x_0) \quad \forall x \in A$ t.c. $|x - x_0| < \delta$.



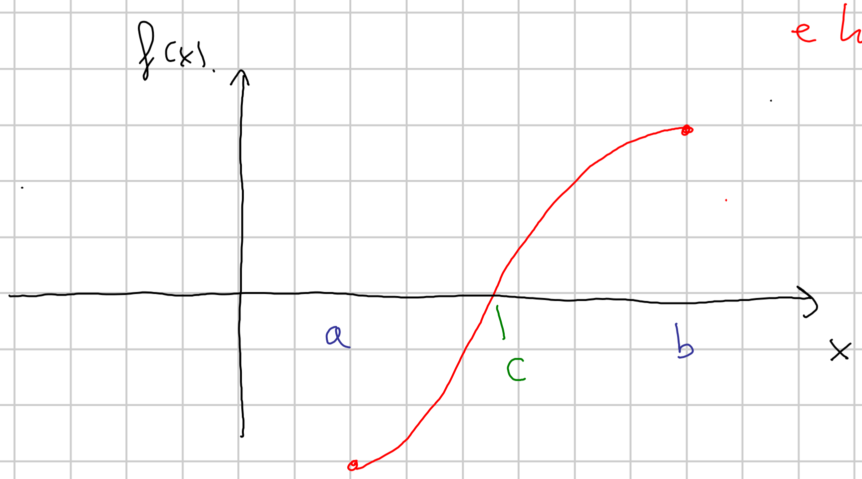


Teorema degli zeri

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se $\underbrace{f(a) \cdot f(b) < 0}$

allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c. $f(c) = 0$

$f(a)$ e $f(b)$ sono $\neq$ da 0
e hanno segni discordi

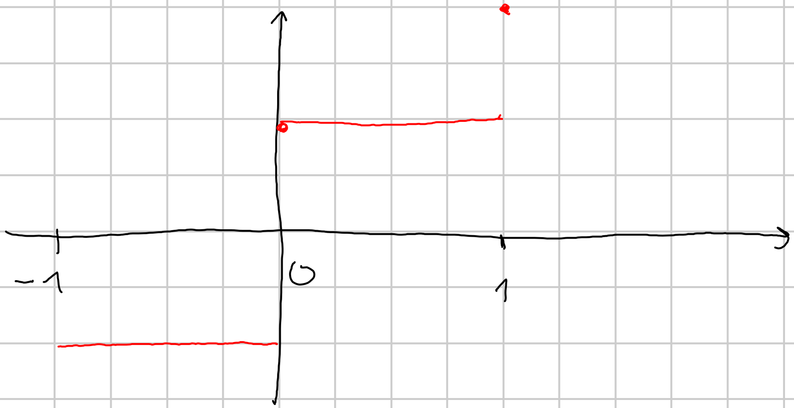


Oss: L'ipotesi di continuità è necessaria.

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = [x] + \frac{1}{2}$.

$f(-1) = -\frac{1}{2}$

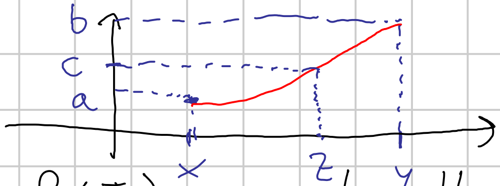
$f(1) = \frac{3}{2}$



$f(x) = -\frac{1}{2}$ $\forall x \in [-1, 0)$. $\quad f(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0, 1)$ $\quad f(1) = \frac{3}{2}$

f assume valori discordi agli estremi ma non si annulla mai.

o Teorema dei valori intermedi



$I \subset \mathbb{R}$ $\quad f: I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ e' un intervallo.

se $\exists\ x, y \in I$ t.c. $f(x) = a$, $f(y) = b$, con $a < b \Rightarrow \forall c \in (a,b)\ \exists\ z \in (x,y)$ t.c. $f(z) = c$

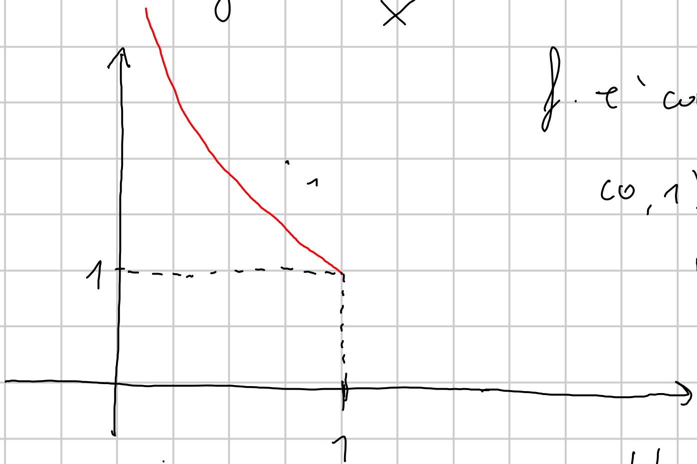
o Teorema di Weierstrass.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad$ ($[a,b]$ limitato chiuso $a, b \neq \pm\infty$).

Allora f ha massimo M e minimo m. E $f([a,b]) = [m, M]$

Oss: Nel teo di Weierstrass serve che l'intervallo $[a,b]$ sia limitato e chiuso.

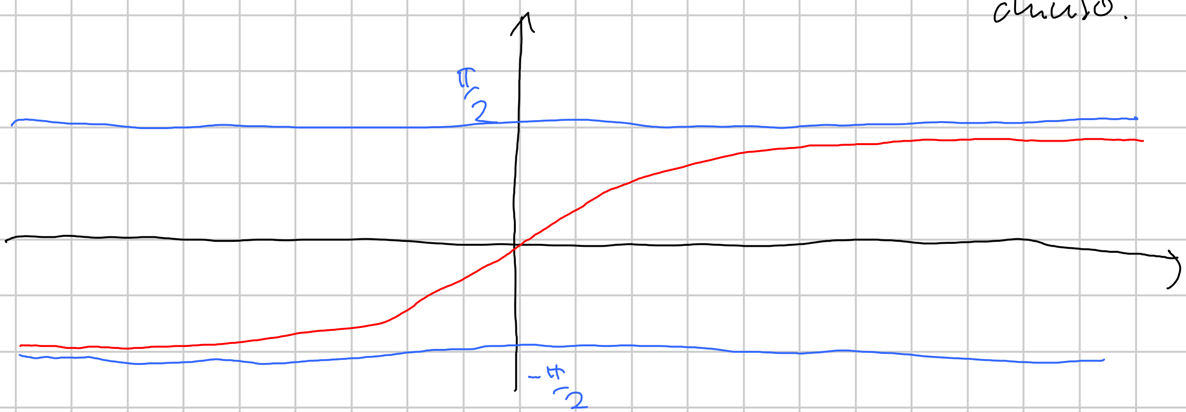
$f:(0,1)\to\mathbb{R} \quad f(x)=\frac{1}{x}$



f è continua su $(0,1)$ ma non ha massimo (e neanche minimo).

$\Downarrow$

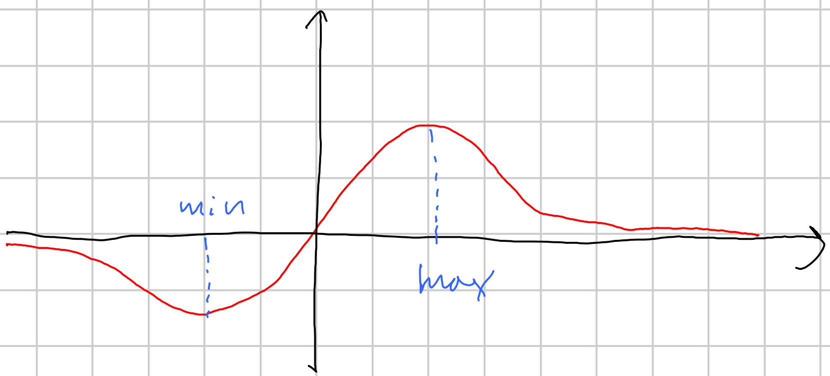
L'intervallo deve essere chiuso.



$f(x) = \arctan x \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non ha né max né minimo

$Im(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = e^{-x^2}$



Intorni

Def: Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice intorno di x_0 un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ per $\delta > 0$. Si dice che δ è il raggio dell'intorno

$\delta \in \mathbb{R}$

intervallo aperto.

- Un insieme del tipo $[x_0, x_0 + \delta)$ si dice intorno destro.
- Un insieme del tipo $(x_0 - \delta, x_0]$ si dice intorno sinistro.

Def: Se $x_0 = +\infty$ un intorno di $+\infty$ è un insieme del tipo $(a, +\infty)$ dove $a \in \mathbb{R}$

↳ semiretta.

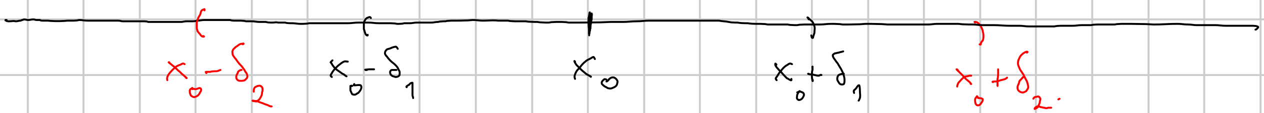
- Intorno di $-\infty$ è un insieme del tipo $(-\infty, a)$ $a \in \mathbb{R}$.

Def: Dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ - retta reale estesa, l'insieme di tutti gli intorni di x_0 si indica $\mathcal{I}(x_0)$.

Oss: Dati U e $V \in \mathcal{I}(x_0)$ risulta che

- $U \cap V \in \mathcal{I}(x_0)$.
- $U \cup V \in \mathcal{I}(x_0)$.

– intorni di x_0 costituiscono un insieme chiuso per intersezione e unione.



$U = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$

$V = (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$

$U \cup V = V$

$U \cap V = U$

$U \cap V$ ha raggio uguale a $\min\{\delta_1, \delta_2\}$

$U \cup V$ ha raggio uguale a $\max\{\delta_1, \delta_2\}$

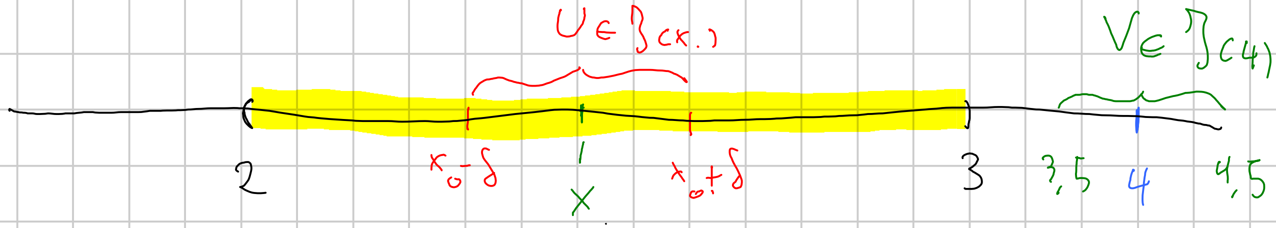
Vale lo stesso con le semirette intorni di $\pm\infty$.

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$ e $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, x_0 si dice **punto di accumulazione** per A se

$\forall U \in \mathcal{I}(x_0)$ risulta $U \cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$

Vuol dire che, arbitrariamente vicino a x_0 ci sono altri punti di A oltre a x_0. (x_0 potrebbe anche non essere un punto di A).

Es: $A = (2,3)$ $Acc(A) = \{$punti di accumulazione di $A\}$



$(x_0-\delta, x_0+\delta) \cap A \setminus \{x\} = (x-\delta, x) \cup (x, x+\delta)$

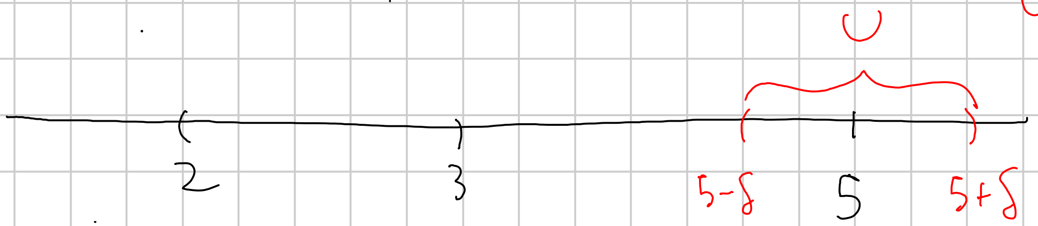
$2 \in Acc(A)$ $\qquad$ $A \setminus \{2\}$

$\forall \delta > 0 \quad \underbrace{(2-\delta, 2+\delta)}_{= U} \cap \underbrace{(2,3)}_{= A \setminus \{2\}} = (2, 2+\delta)$

$3 \in Acc(A) \qquad Acc(A) = [2,3] \qquad A \subsetneq Acc(A)$

∘ $B = [2,3]$ $\quad Acc(B) = B = [2,3]$.

∘ $C = (2,3) \cup \{5\}$ $\quad Acc(C) \supset [2,3]$



$U \cap C \setminus \{5\} = U \cap (2,3) = \emptyset$

$\delta < 2$.

5 non è un punto di accumulazione (è un punto isolato)

↳ $\in$ a C ma non $\in$ ad $acc(C)$.

Es: $D = (3, +\infty)$ $\quad +\infty \overset{?}{\in} Acc(D)$ sì

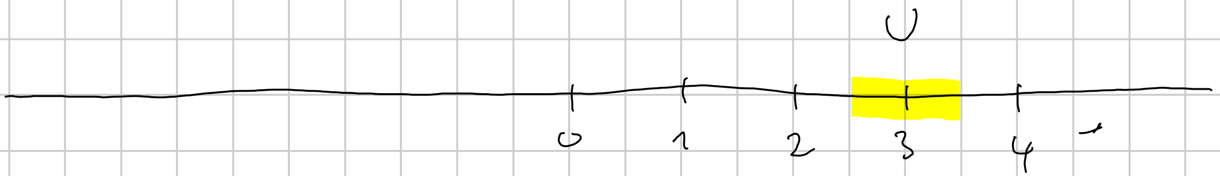
$\forall \in \mathcal{I}(\infty)$ qualsiasi $U = (a, +\infty)$ e $U \cap D \setminus \{+\infty\} \neq \phi$

$$= (a, +\infty) \cap (3, +\infty) \setminus \{\infty\}$$
$$= (b, +\infty) \neq \phi$$

dove $b = \max\{a, 3\}$.

$Acc(D) = [3, +\infty]$ → compreso $+\infty$

- $E = \mathbb{N}$ $\quad Acc(\mathbb{N}) = ?$ $\quad Acc(\mathbb{N}) = \{+\infty\}$



$U \cap \mathbb{N} = \{3\}$

$U \cap \mathbb{N} \setminus \{3\}$

Tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono punti isolati. (Lo stesso vale per $\mathbb{Z}$).

$\forall\, U \in \mathfrak{B}(+\infty)$ vale $U \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$

$U = (a, +\infty) \quad U \cap \mathbb{N} \setminus \{\infty\} = U \cap \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > a\} \neq \emptyset$

$\forall\, a \in \mathbb{R}$

$\mathbb{Z}$, $Acc(\mathbb{Z}) = \{+\infty, -\infty\}$

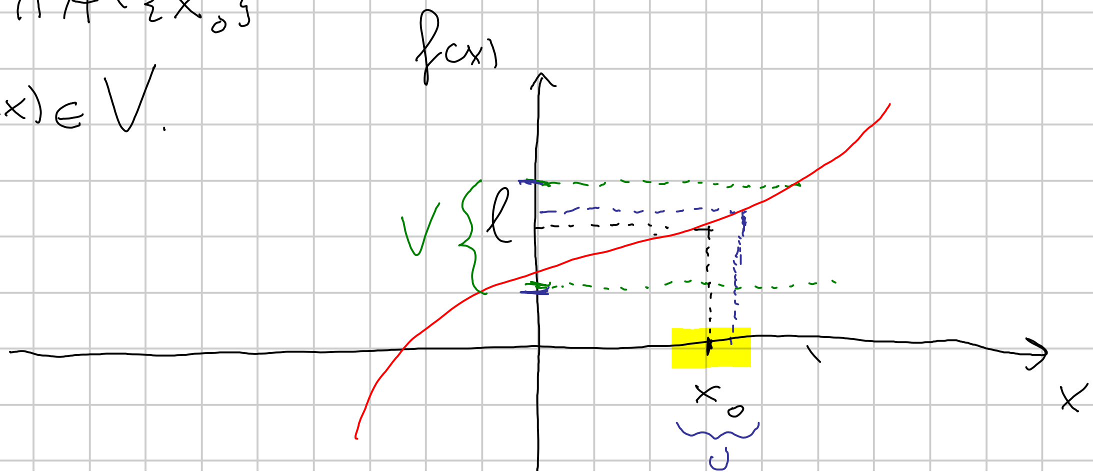
- $\mathbb{Q}$ $Acc(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{R}}$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ si dice punto interno ad A.
se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $U \subset A$.

Es: $A = [3,4]$ $\quad (3,4) = int(A)$ $\quad$ I punti interni ad A si indicano con $int(A)$

Def: Dato $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, consideriamo
$x_0 \in Acc(A)$.

Diciamo che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di f per x che tende
a x_0 se $\forall V \in \mathcal{I}(\ell)$ $\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.
$x \in U \cap A \setminus \{x_0\}$
$\Rightarrow f(x) \in V$.



Nel caso $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$

$\forall V \in \mathcal{I}(\ell)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$

equivalenti

$\exists U \in \mathcal{I}(x_0)$

$\exists \delta > 0 \quad U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

equivalenti

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$|x - x_0| < \delta, \; x \in A, \; x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$x \in U$

$f(x) \in V$

equivalenti