Lezione 3-12

Oss: $D(\log(f(x))) = \dfrac{f'(x)}{f(x)} \quad f(x) > 0$

quindi: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \log(f(x)) + c$

Es: $\displaystyle\int \arctan x \cdot dx = \int \underbrace{1}_{f} \cdot \underbrace{\arctan x}_{g} \cdot dx =$ $\quad F = x$

$g' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\displaystyle = Fg - \int F g' \cdot dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \cdot dx =$

$\displaystyle = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \cdot dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$

Integrazione per sostituzione

I, J intervalli di $\mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

$\varphi: J \to I$ di classe C^1. Se F è una primitiva di f,

allora $\int (f \circ \varphi) \cdot \varphi' \cdot dx = (F \circ \varphi) + c$

Dim:

Notare che $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ - regola di derivazione per funzioni composte.

Es: $\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx =$ poniamo $\varphi(x) = x^2$

$= \int \frac{\varphi'(x)}{2} \cdot e^{\varphi(x)} \cdot dx =$ $\varphi'(x) = 2x \Rightarrow x = \frac{\varphi'(x)}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int \varphi'(x)\cdot f(\varphi(x))\cdot dx =$$

$$f(t) = e^t$$
$$\Downarrow$$
$$F(t) = e^t$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(F(\varphi(x)) + c\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + c\right) =$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + c' \qquad c' = \frac{1}{2}c$$

Metodo pratico:

$\int x\cdot e^{x^2}\cdot dx$ poniamo $x^2 = t \Rightarrow t = t(x) \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 2x$

$$dt = 2x\cdot dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x\cdot dx$$

$$\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx = \int e^t \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t \cdot dt = \frac{1}{2}\left(e^t + c\right) =$$

sostituiamo a t la sua espressione come funzione di x

$$= \frac{1}{2}\left(e^{x^2} + c\right) = \frac{1}{2} e^{x^2} + c'$$

Es: $\displaystyle\int \frac{tg\, x}{\cos^2 x} \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \cdot dx =$ poniamo $t = \cos x$

$$\frac{dt}{dx} = -\sin x$$

$$dt = -\sin x \cdot dx$$

$$\sin x \cdot dx = -dt$$

$$= -\int \frac{1}{t^3} \cdot dt =$$

$$= -\int t^{-3} \cdot dt = -\frac{t^{-2} + c}{-2} = \frac{1}{2t^2} + c =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot \cos^2 x} + c$$

Es: $\int \sqrt{1-x^2} \cdot dx =$ poniamo $x = \sin t$ $\left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t \cdot dt =$ $\frac{dx}{dt} = \cos t \Rightarrow dx = \cos t \cdot dt$

$= \int \sqrt{\cos^2 t} \cdot \cos t \cdot dt = \int |\cos t| \cdot \cos t \cdot dt = \int \cos^2 t \cdot dt =$

$\frac{t + \sin t \cdot \cos t}{2} + C =$ lo devo esprimere in funzione di x.

$x = \sin t$ $t = \arcsin x$

$= (\text{sostituendo})$ $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$

$= \frac{\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} + C$

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + c$$

$$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$D(\arcsin x + \arccos x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x$ è una funzione costante su $[-1, 1]$

Quanto vale la costante? La calcolo per $x=0$

$$\arcsin 0 + \arccos(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = \arcsin x + c = \frac{\pi}{2} - \arccos x + c = -\arccos x + d$$

$$d = \frac{\pi}{2} + c$$

Integrazione di funzioni razionali con denominatore di secondo grado.

$$\boxed{\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} \cdot dx}$$

Caso 1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^2}$ → denominatore ha due radici reali coincidenti).

Sostituzione $x-a=t$ $\quad \frac{dx}{dt} = 1 \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} \cdot dt = -1 \cdot t^{-1} + c = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x-a} + c$$

Caso 2) due radici reali distinte

$$\int \frac{dx}{(x-a)(x-b)} \qquad a \neq b \text{ \# reali dati}$$

proviamo a trovare due numeri A e B t.c.

$$\frac{1}{(x-a)\cdot(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} = \frac{A\cdot(x-b) + B(x-a)}{(x-a)\cdot(x-b)} = \frac{Ax - Ab + Bx - Ba}{(x-a)\cdot(x-b)} =$$

$$= \frac{(A+B)x - Ab - Ba}{(x-a)\cdot(x-b)}$$ deve essere uguale a $$\frac{1}{(x-a)(x-b)}$$

I denominatori sono uguali, pertanto devono coincidere i numeratori.

$$(A+B)x - Ab - Ba = 1 = 0\cdot x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-Ba=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = -B$$

sostituendo otteniamo $B\cdot b - B\cdot a = 1$

$$B(b-a) = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{b-a}$$ → ha senso poiché $b \neq a$

$A = -B = \frac{1}{a-b}$. sostituiamo

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} = \frac{\frac{1}{a-b}}{(x-a)} + \frac{\frac{1}{b-a}}{x-b} =$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)\cdot(x-b)} = \int \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{a-b} \left(\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x-b} \right) = \frac{1}{a-b} \left(\log|x-a| - \log|x-b| \right) =$$

$$= \frac{1}{a-b} \cdot \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right| + c$$

Es: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+15}$ $\qquad x = 4 \pm \sqrt{16-15} = 4 \pm 1 \begin{cases} 5 \\ 3 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2-8x+15 = (x-5)(x-3) \qquad a=5, \; b=3$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+15} = \frac{1}{a-b} \cdot \log \left| \frac{x-a}{x-b} \right| = \frac{1}{2} \cdot \log \left| \frac{x-5}{x-3} \right| + c$$

Se scambio a e b, cioe' prendo $a=3$, $b=5$ ottengo

$=$

$$-\frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{x-3}{x-5}\right|\right) = -\frac{1}{2}\left(-\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right|\right) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-5}{x-3}\right|$$

Caso 3) denominatore non ha radici reali.

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$$

generalizziamo

$k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} \rightarrow \text{non ha radici reali}$$

$$\int \frac{dx}{k^2\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2} =$$

Cambio variabile

$\frac{x}{k} = t \qquad x = t \cdot k$

$dx = k \cdot dt$

$$= \frac{1}{k^{\cancel{2}}} \cdot \int \frac{\cancel{k} \cdot dt}{1+t^2} = \frac{1}{k} \arctan\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

Caso generale:

discriminante del polinomio

x^2+px+q senza radici reali $\Rightarrow \Delta = p^2-4q < 0$

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4}+q$$

$-\frac{p^2}{4}+q > 0$ per

$\Rightarrow$ pongo $-\frac{p^2}{4}+q = k^2$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}$$

sostituiamo $x+\frac{p}{2}=t$

$\frac{dx}{dt}=1 \Rightarrow dx=dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+k^2}$$

Es: $\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{(x^2+2x+1)-1+10} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$

$k^2=9$

$\Downarrow$

$k=3$

$x+1=t$

$dx=dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+9} \underset{\text{caso precedente}}{=} \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{t}{3}\right)+c =$$

$$= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$$

Numeratore di 1° grado.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\cdot dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\cdot dx =$$

il numeratore e' la derivata del denom.

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+c-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\cdot dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d}\cdot dx + \frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}\cdot dx$$

$$= \underbrace{\frac{a}{2}\log|x^2+cx+d|}_{\text{integrale per sostituzione } \left[\frac{f'}{f}\right]} + \frac{a}{2}\int \frac{-c+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d}$$

→ e' uno dei tipi precedenti.