Lezione 31-10

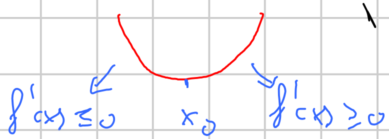
Prop: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$.

f non deve necessariamente essere derivabile in x_0.

Supponiamo f sia continua su I e derivabile su $I \setminus \{x_0\}$

↳ in part. f sia continua in x_0.

1) Se $f'(x) \leq 0$ in un intorno sinistro di x_0 e $f'(x) \geq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è punto di minimo locale



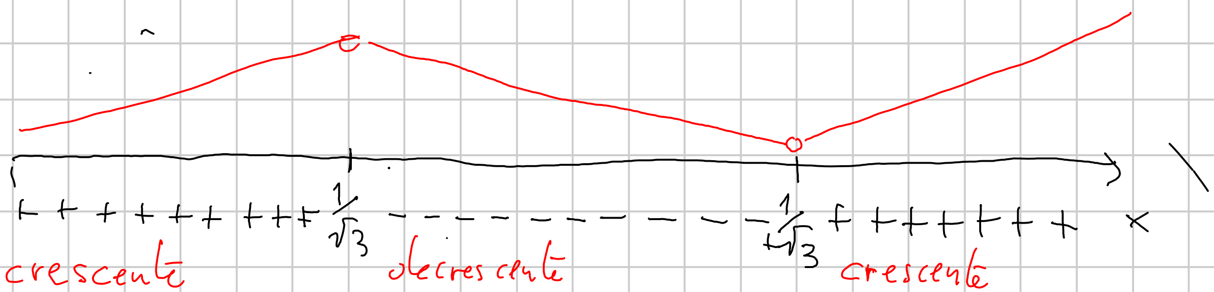
2) Se $f'(x) \geq 0$ in un intorno sx di x_0 e $f'(x) \leq 0$ in un intorno destro di x_0, allora x_0 è punto di massimo locale.

Es: $f(x) = x^3 - x \qquad f'(x) = 3x^2 - 1.$

Discutiamo il segno di $f'(x)$.

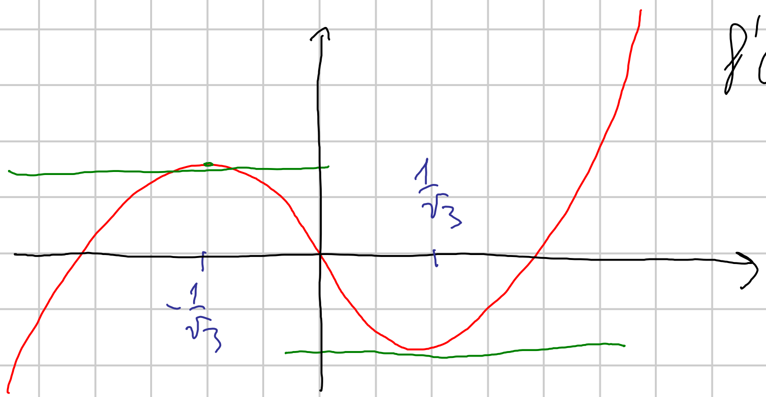
$f'(x) \geq 0 \qquad 3x^2 - 1 \geq 0, \quad 3x^2 \geq 1 \iff x^2 \geq \frac{1}{3}$

$f'(x) \geq 0$ se $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, cioè $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$



$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ è un punto di massimo locale

$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ e' un punto di minimo locale



$f'(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = f'(\frac{1}{\sqrt{3}}) = 0$

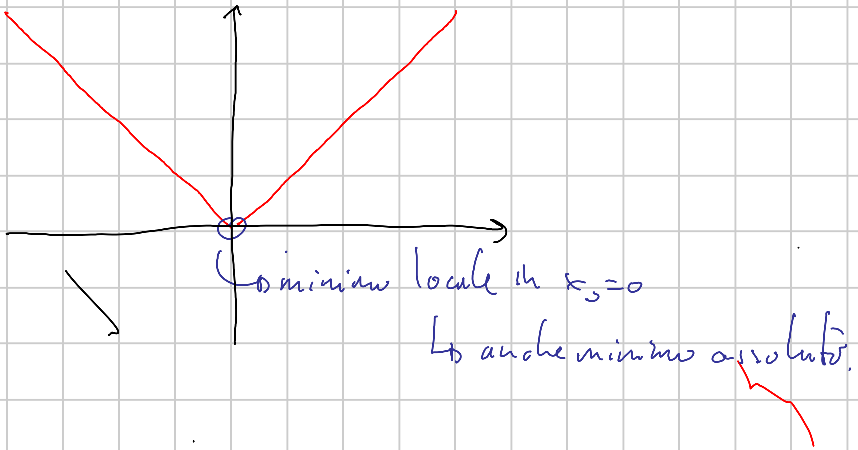
Es: Dove f non e' derivabile in x_0.

$f(x) = |x|$ f e' derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ma non in $x_0 = 0$)

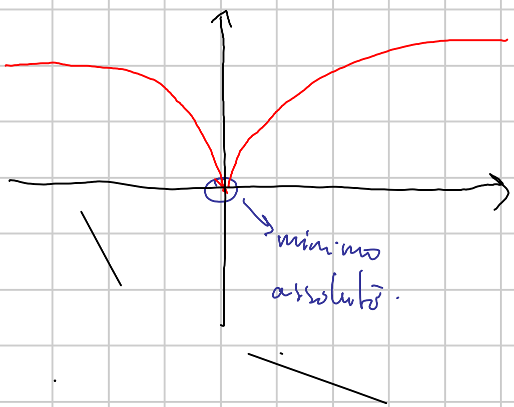
$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$f'(x)$ e' ≤ 0 in un intorno sx di $x_0 = 0$

$f'(x)$ è ≥ 0 in un intorno dx di $x_0=0$



Es: $f(x)=\sqrt{|x|}$



f è continua, ma non è derivabile in $x_0=0$

$f'(x) < 0 \quad \forall x < 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}} < 0$ per $x < 0$.

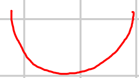
$f'(x) > 0 \quad \forall x > 0 \longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ per $x > 0$.

Teorema. $A \subset \mathbb{R}$ $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(A)$.

Supponiamo che f sia derivabile due volte in x_0 e $f'(x_0) = 0$.

Allora:

1) Se x_0 è un punto di minimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$



2) Se x_0 è un punto di massimo locale $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

3) Se $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale

4) Se $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale.

! Le condizioni 1) e 2) sono condizioni necessarie affinché x_0 sia p.to di min o max. locale

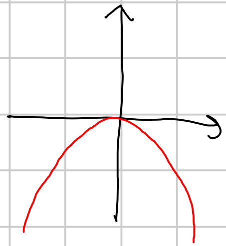
le condizioni 3) e 4) sono condizioni sufficienti

Es: $f(x) = x^2 \quad f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2$

$f'(0) = 0 \quad f''(0) > 0 \Rightarrow x_0$ è di minimo locale

∘ $g(x) = -x^2 \quad g'(x) = -2x \quad g''(x) = -2$

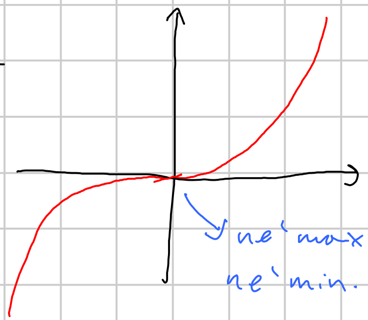
$g'(0) = 0, \quad g''(0) < 0 \Rightarrow$ max locale



Es: Se $f''(x_0)=0$ non posso dire niente.

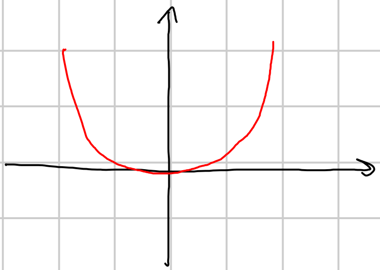
$h(x)=x^3$. $h'(x)=3x^2$ $h''(x)=6x$.

$h'(0)=0$ $h''(0)=0$. In questo caso $x_0=0$ non è né max né min. locale



$f(x)=x^4$. $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2$.

$f'(0)=0$, $f''(0)=0$, ma in questo caso $x_0=0$ è un minimo (assoluto)



$g(x) = -x^4$, $g'(0) = 0$ $g''(0) = 0$ ma $x_0 = 0$ e' max. locale.

Teorema di de L'Hôpital.

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, derivabili in (a,b)

Se valgono le seguenti condizioni:

1) $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

2) $g'(x) \neq 0$ in un intorno destro di a

3) $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $\exists \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Le ipotesi non richiedono che f e g siano derivabili nel punto in cui vogliamo calcolare il limite.

Vale anche per $\lim_{x \to b^-}$

Es: $\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{2\cos x - 2 + x^2}^{f}}{\underbrace{x^4}_{g}} = \frac{0}{0} = \ldots \to \frac{1}{12}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin x + 2x}{4x^3} = \frac{0}{0}$$

Uso ancora de l'Hopitál.

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x + 2}{12x^2} = \frac{0}{0}.$$

Ancora de l'Hôpitál...

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin x}{24x} = \frac{0}{0} \quad \ldots\ldots \quad \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}.$$

Es: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

de l'Hôpital

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ ..... ripetiamo: $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

Oss: con de l'Hopital abbiamo un ulteriore modo per verificare che $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Attenzione!

Verificare sempre l'ipotesi 1):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

se avessi usato de l'Hôpital...

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}$$ - sbagliato.

- Potrebbe esistere $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ ma non $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Esempio: $f(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}}{x} = \frac{0}{0}$$

questo limite esiste

$$\underset{0}{x} \cdot \underset{\text{limitata}}{\sin\frac{1}{x}}$$

ed è uguale a 0.

$$f'(x) = 2x \cdot \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{x^2}}\right).$$

$g'(x) = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \underset{0}{2x \cdot \sin\frac{1}{x}} - \cos\frac{1}{x}$$

non esiste

$\longleftrightarrow$ non esiste.

Oss: Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ finito.

e $\lim_{x \to x_0} g(x)$ non esiste, allora $\lim_{x \to x_0} f(x) + g(x)$ non esiste.

Se trovo che non esiste $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ non posso concludere

che non esiste $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$

Corollario Se $\boxed{f \text{ è continua in } x_0}$ e derivabile in un intorno di x_0, eccetto al più x_0, e se esiste

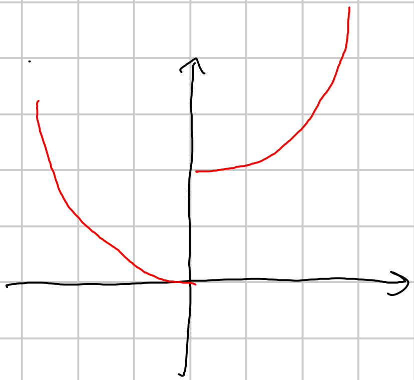
$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}, \quad \text{allora } f'(x_0) = \ell$$

non chiedo che f sia derivabile in x_0.

Dim:

Applicare de L'Hopital a $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$



f è derivabile in $x=0$? $\boxed{NO}$ perché f non è continua in $x_0=0$.

Però $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x>0 \\ 2x & \text{se } x<0 \end{cases}$

quindi esiste $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} 2x = 0$

Non posso concludere che $f'(0)=0$

Oss: Anche se una funzione è continua in x_0, non è la stessa cosa fare il limite della derivata o calcolare il limite del rapporto incrementale.

Es: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

f è continua in $x_0 = 0$.

Se $x \neq 0$, calcolo $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ $\cancel{\exists}$

Non posso applicare il corollario precedente.

Non posso concludere che f non è derivabile in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

Def: Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, definiamo

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$

si chiama fattoriale di n, ed è il prodotto dei numeri interi da 1 a n. Per convenzione si pone $0! = 1$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

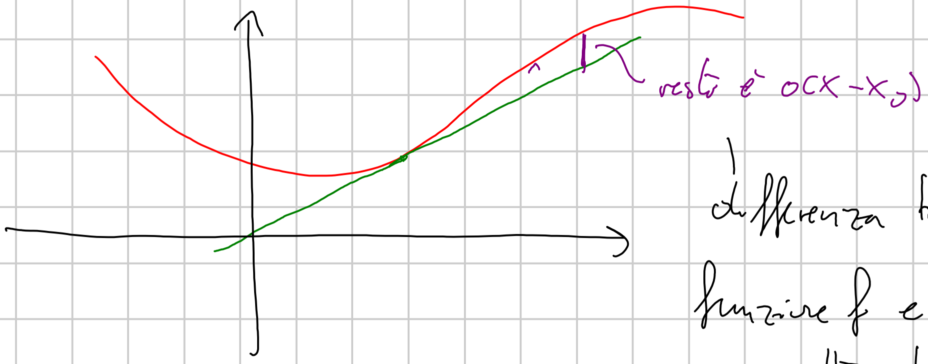
In generale $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$(n+1)! = [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n](n+1) = n!\,(n+1)$

Formula Taylor

Se f è derivabile in un punto x_0, allora

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{retta tangente al grafico di } f \text{ in } x_0} + \underbrace{o(x-x_0)}_{\text{"resto"}}$$ – dalla definizione di derivata.



differenza tra la funzione f e la sua retta tangente.

Formula di Taylor con resto di Peano:

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$. Se f è derivabile n volte in x_0, e almeno $n-1$ volte in (a,b), allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado $\leq n$, e una funzione $R_n(x)$ tale che:

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, e $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$;

cioè $\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$

Il polinomio P_n è della seguente forma:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n.$$

Si scrive anche così: $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$