Lezione 5-12

- 2a simulazione corso A: DOMANI ORE 16:00 AULA E
- 2a simulazione corso B: LUNEDì 9 ORE 16:00 AULA C

Volta scorsa caso $\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d} \cdot dx$

Es: $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1} \cdot dx = 2 \int \frac{2x+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1} \cdot dx =$

$= 2 \int \frac{2x+2-2+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1} \cdot dx =$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1} \cdot dx + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x-1} \cdot dx = 2 \cdot \log|x^2+2x-1| +$$

$$+ \int \frac{dx}{x^2+2x-1} \rightarrow \Delta = 4+4 = 8 > 0 \rightarrow \text{2 radici reali distinte}$$

↳ casi precedenti (num. ha grado)

Numeratore ha grado ≥ 2

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \cdot dx \quad \text{grado}(N) \geq 2 \quad \text{grado}(D) = 2$$

$$N(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x) \qquad \text{grado}(R(x)) < 2$$

grado $(D(x)) = 2$

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} \cdot dx = \int \frac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{D(x)} \cdot dx =$$

grado 0 oppure 1.

$$= \int Q(x) \cdot dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} \cdot dx$$

polinomio

Es: $\displaystyle\int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} \cdot dx$

Divisione fra polinomi

$$x^5 - 3x^4 + 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + x + 3 \quad \Big| \quad x^2 - 1 \rightarrow D(x)$$

$$-x^5 \qquad + x^3 \qquad \Big| \quad x^3 - 3x^2 + x - 3 \quad Q(x)$$

$$// \quad -3x^4 + x^3 + 0\cdot x^2 + x + 3$$

$$+3x^4 \qquad -3x^2$$

$$x^3 - 3x^2 + x + 3$$

$$-x^3 \qquad + x$$

$$-3x^2 + 2x + 3$$

$$+3x^2 \qquad -3$$

$$2x \longrightarrow R(x)$$

$$x^5 - 3x^4 + x + 3 = (x^3 - 3x^2 + x + 3)(x^2 - 1) + 2x$$

$$\int \frac{x^5-3x^4+x+3}{x^2-1}\cdot dx = \int \frac{(x^3-3x^2+x-3)(x^2-1)+2x}{x^2-1}\cdot dx$$

$$= \int x^3-3x^2+x-3 \cdot dx + \int \frac{2x}{x^2-1}\cdot dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2-1| + C$$

Equazioni differenziali ordinarie

Sono equazioni dove l'incognita è una funzione.

Sia $y = y(x)$ una funzione derivabile n-volte.

Sia F una funzione di n+2 variabili

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ si dice equazione differenziale ordinaria di ordine n.

n è l'ordine della derivata più alta di y che compare nell'equazione.

Es: $\sin(y') + y^4 + \log x = 0$ – ordine 1.

$\log(y'') + e^{y'} + \operatorname{tg} x \cdot y = 0$ – ordine 2

Es: $y' = x^2$ eq. diff. di ordine 1.

L'incognita è $y(x)$. Trovare una funzione $y(x)$ tale che

$y'(x) = x^2$, cioè $\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + c$

Es: $y' = y$ eq. diff. ordinaria di ordine 1.

Cerco una funzione che sia uguale alla sua derivata

$y = e^x$ $y = 0$ $y = e^x + c$ NON è soluzione

$y' = e^x \neq y$ se $c \neq 0$.

$y = k \cdot e^x \Rightarrow y' = k \cdot e^x \Rightarrow y' = y$

↳ è soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$

Es: $y'' = y$ – eq. diff. di ordine 2.

$y = k \cdot e^x$ è soluzione $y' = k \cdot e^x$ $y'' = k \cdot e^x = y$

$y = h \cdot e^{-x} \Rightarrow y' = h \cdot (-e^{-x}) = -h \cdot e^{-x}$

$y'' = (-h) \cdot (-e^{-x}) = h \cdot e^{-x} = y$

Tutte le funzioni della forma $y = k \cdot e^x + h \cdot e^{-x}$ sono soluzioni.

$\forall\, k, h \in \mathbb{R}$

$y' = k \cdot e^x - h \cdot e^{-x}$

$y'' = k \cdot e^x + h \cdot e^{-x} = y$ → le soluzioni dipendono da 2 parametri

Es: $y'' = -y$ $\quad$ $y = \sin x$ è soluzione

$y = \cos x$ è soluzione

$y = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$ è soluzione $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Problema di Cauchy

Considero un'equazione differenziale ordinaria di ordine n e aggiungo n condizioni:

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

è sempre lo stesso punto $x_0 \in \mathbb{R}$

x_0 è un punto fissato (punto iniziale)

$y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ sono valori fissati (valori iniziali)

In generale l'equazione differenziale ha soluzioni dipendenti da n parametri (n = ordine dell'equazione). Le n condizioni iniziali servono a fissare i parametri

Es: $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$

] – usiamo queste condizioni per determinare univocamente c_1 e c_2

∘ $y(0) = 0$ $\quad 0 = y(0) = c_1 \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\cos 0} + c_2 \cdot \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\sin 0} = c_1$

$\Downarrow$

$c_1 = 0$

∘ $y'(0) = 1$ $\quad y'(x) = -c_1 \cdot \sin x + c_2 \cos x$

$\Rightarrow y'(0) = -c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot \cos 0 = -c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = c_2 = 1$

La soluzione generale era $y(x) = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$.

La soluzione con le condizioni iniziale date è quella con $c_1 = 0$, $c_2 = 1$

cioè $y(x) = \sin x$.

Equaz. diff. lineari del primo ordine.

Sono le equazioni del tipo:

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$ con $a(x)$ e $b(x)$ funzioni continue.

Es: $y' = y \cdot \sin x + \cos x$ $\quad a(x) = \sin(x)$

$b(x) = \cos(x)$

non è lineare perché y è elevato al quadrato.

Es: $y' = \log x \cdot y^2 + e^x$

Se $b(x)=0$ l'equazione si dice omogenea.

Oss: Consideriamo un'equazione omogenea

$$y' = a(x) \cdot y.$$

Se ho due soluzioni y_1 e y_2 allora y_1+y_2 è ancora soluzione

$$(y_1+y_2)' = y_1' + y_2' = a y_1 + a y_2 = a(y_1+y_2)$$

Inoltre se $k \in \mathbb{R} \Rightarrow k \cdot y_1$ è ancora soluzione, infatti:

$$(ky)' = ky' = k \cdot ay = a(ky)$$

Soluzione generale dell'equazione completa

$y' = a(x) \cdot y + b(x)$.

Consideriamo una primitiva di $a(x)$, cioè $A(x)$ t.c. $A' = a$

Moltiplichiamo l'equazione per $e^{-A(x)}$:

$$y' \cdot e^{-A(x)} = a(x) \cdot y \cdot e^{-A(x)} + b(x) \cdot e^{-A(x)}$$

$$\boxed{y' \cdot e^{-A(x)} - a(x) \cdot y \cdot e^{-A(x)}} = b(x) \cdot e^{-A(x)}$$

$$\underline{\frac{d}{dx}\left(y \cdot e^{-A(x)}\right)} = y' \cdot e^{-A(x)} + y\left(-A' \cdot e^{-A(x)}\right) = \underline{y' \cdot e^{-A(x)} - a \cdot y \cdot e^{-A(x)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\cdot e^{-A(x)}\right) = b(x)\cdot e^{-A(x)}$$ ora integro da tutte e due le parti in dx

$$y\cdot e^{-A(x)} = \int b(x)\cdot e^{-A(x)}\cdot dx + c$$ moltiplico per $e^{A(x)}$

$$\boxed{y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)\cdot e^{-A(x)}\cdot dx + c\right)}$$

↳ sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione

$y' = ay + b.$

Oss. Soluzione nel caso omogeneo $y' = a(x) \cdot y$

e' $e^{A(x)+c}$ con $A(x)$ primitiva di $a(x)$

$y = e^{A(x)+c}$ $\quad y' = e^{A(x)+c} \cdot a(x)$

Es: $\underbrace{y' = x^2}_{a'} \cdot y + \underbrace{x^2}_{b'}$ $\qquad a(x) = x^2, \quad b(x) = x^2$

$A(x) = \int a(x) \cdot dx = \int x^2 \cdot dx = \frac{x^3}{3}$

Devo calcolare $\int e^{-A(x)} \cdot b(x) \cdot dx = \int e^{-\frac{x^3}{3}} \cdot x^2 \cdot dx$

sostituzione $x^3 = t$, $\frac{dt}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dt = 3x^2 \cdot dx$

$$\int e^{-t/3} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^{-\frac{t}{3}} \cdot dt = \frac{1}{3}(-3) \cdot e^{-t/3} = -e^{-t/3} = -e^{-x^3/3}$$

$$y(x) = e^{A(x)} \cdot \left(\int e^{-A(x)} \cdot b(x) \cdot dx + c\right) =$$

$$= e^{x^3/3} \cdot \left(-e^{-x^3/3} + c\right) = -1 + c \cdot e^{x^3/3}$$ - soluzione generica

Consideriamo problema di Cauchy associato alla stessa eq.

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

Sostituisco $x = 3$ e $y = 2$ nella sol. generale e ricavo c.

$$y(x) = -1 + c \cdot e^{x^3/3}$$

$$2 = -1 + c \cdot e^9 \Rightarrow 3 = c \cdot e^9 \Rightarrow c = \frac{3}{e^9}$$

$\Rightarrow$ sol. problema di Cauchy e'

$$y(x) = -1 + \frac{3}{e^9} \cdot e^{x^3/3} = -1 + 3\, e^{x^3/3 - 9}.$$