# Lezione 8-10

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$x_0 \in Acc(A)$ $x_0 \in \mathbb{R}$

Supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Scriviamo questa proprietà:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c.

e $x \neq x_0$, $x \in A$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \underset{f(x_0)}{\overset{\shortparallel}{\ell}}| < \varepsilon$

Se $x_0 \in A$, allora $f$ e' continua in $x_0 \Leftrightarrow l = f(x_0)$

Oss: $f$ e' continua in $x_0 \in A$ se e solo se

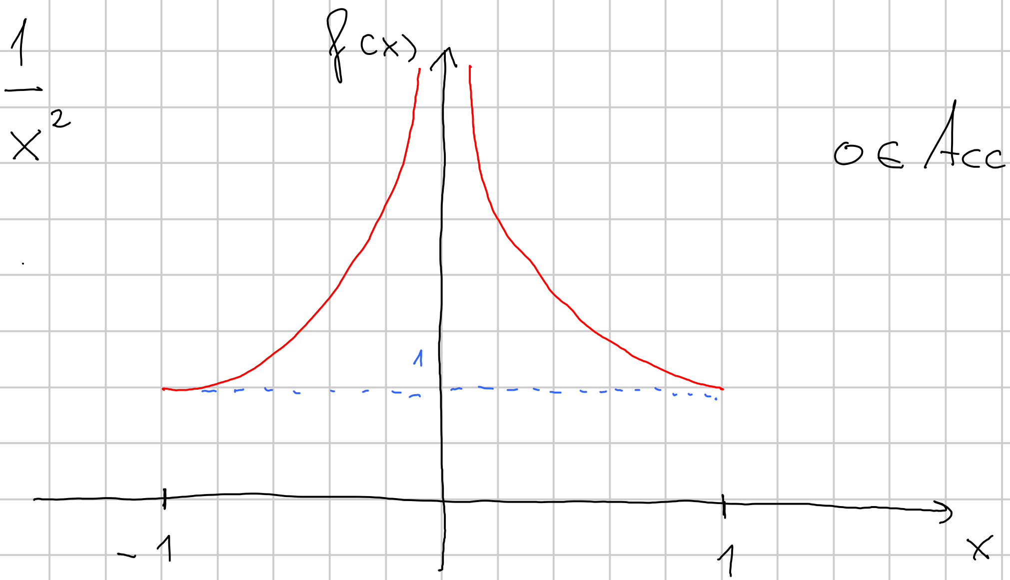
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ → Definizione equivalente di continuità di $f$ in $x_0$.

Osservazione 1. Quando facciamo $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non e' detto che $x_0 \in A$ - dominio della funzione.

Osservazione 2: Se $x_0 \in A$ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non dipende da $f(x_0)$

Esempio: $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$




$0 \in Acc(Dom(f))$.

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Verifichiamolo

Fissiamo $V \in \mathcal{I}(+\infty)$. Allora $V = (a, +\infty)$.

Supponiamo per ora $a > 0$

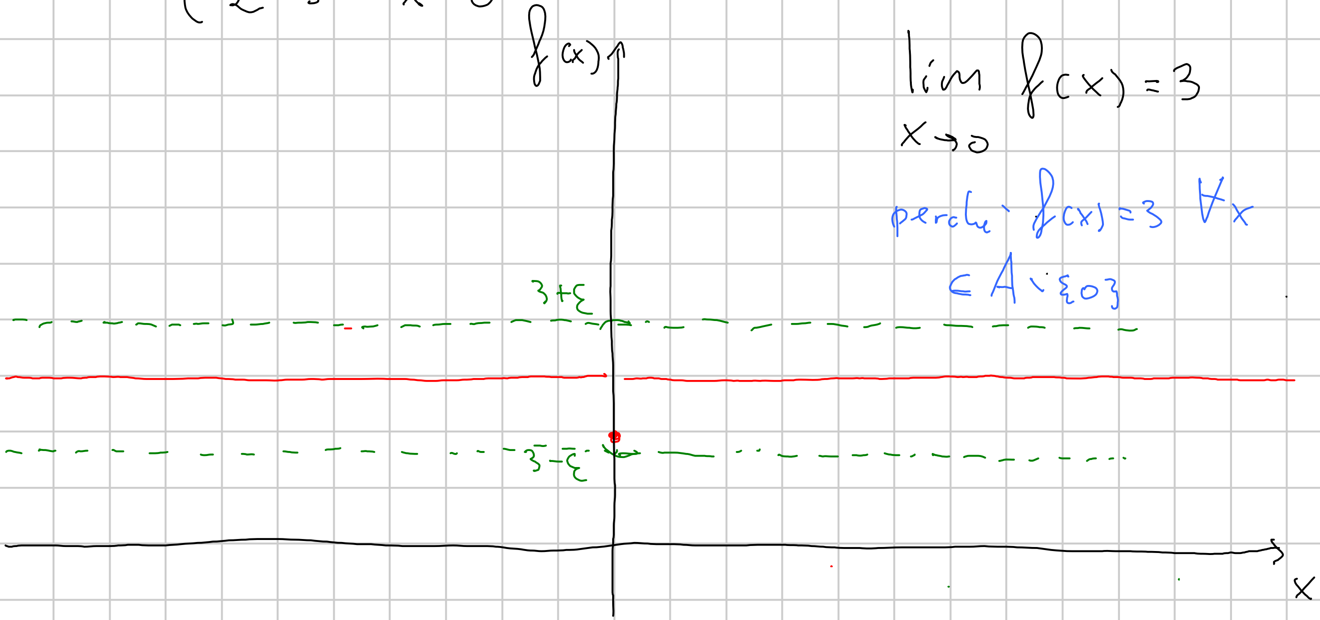
$$U = \left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right) \in \mathcal{I}(0)$$

Se $x \in U \cap A \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} > a$, cioè $f(x) \in V$

Se $V = (a, +\infty)$ con $a \leq 0$

Esempio $A = [-1, 1]$ $f : A \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$




$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3$$

perché $f(x) = 3$ $\forall x \in A \setminus \{0\}$

$f$ è continua in 0? NO $\lim_{x \to 0} f(x) = 3 \neq f(0) = 2$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f: A \to \mathbb{R}$.

Si dice che $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite di $f$ per $x$ che tende a $x_0$ da destra (e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$)

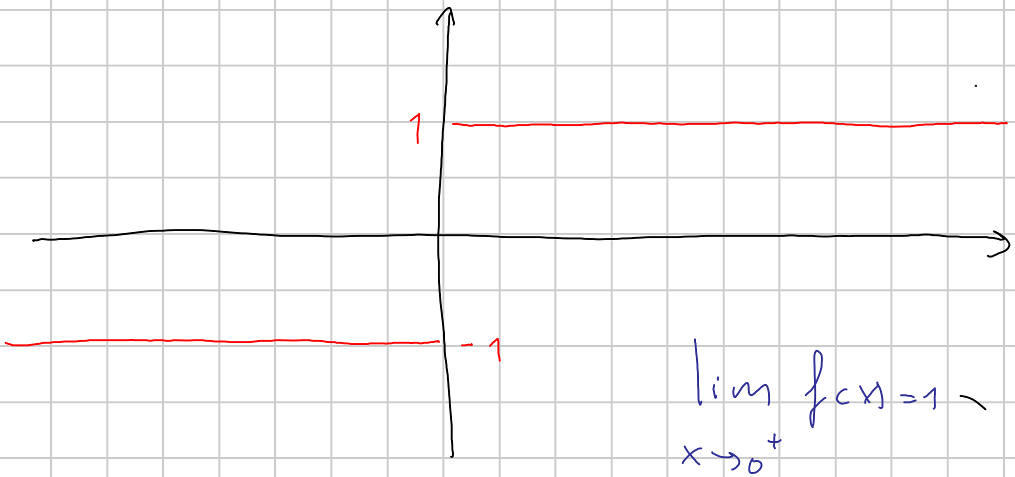
Se $\forall\, V \in \mathcal{I}(\ell)$ $\exists\, U$ intorno destro di $x_0$ t.c.

$x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V$

$U$ è della forma $[x_0, x_0 + \delta)$

Def. analoga per lim di $f$ per $x \to x_0$ da sx.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Teorema: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$

e $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$

Def: $A\subset\mathbb{R}$ $f: A\to\mathbb{R}$ $x_0\in Acc(A)$. Si dice

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell^+$ $\ell\in\mathbb{R}$ se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e

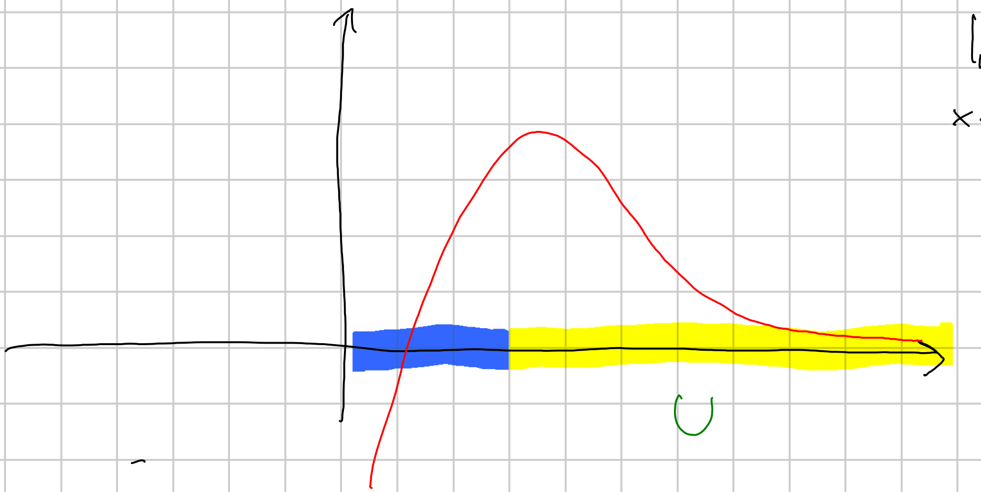
$\exists\, V\in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $\forall x\in A\cap V\setminus\{x_0\} \Rightarrow f(x) > \ell$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

Teorema: Se il limite esiste, allora è unico

Data $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$ se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, tale limite è unico



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$$

$U$

Teorema sulla permanenza del segno.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$.

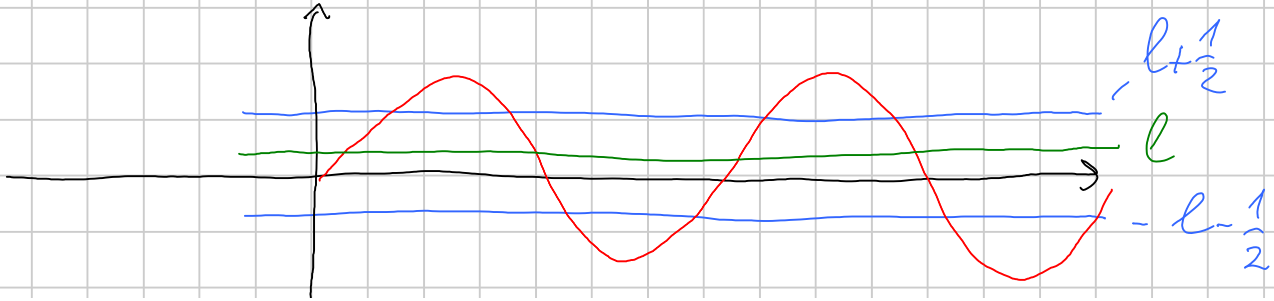
Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\ell \neq 0$ allora $\exists\, V \in \mathcal{I}(x_0)$

t.c. $x \in V \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x)$ ha lo stesso segno di $\ell$.

Esempio: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\underbrace{\lim_{x\to 0^+}}_{\lim_{x\to 0} f(x)} \frac{1}{x} = +\infty > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \text{ in un intorno destro di } 0$$

Esempio: $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ non esiste!



Supponiamo per assurdo che $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \ell \in \mathbb{R}$ $\left(\ell \in [-1,1]\right)$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Poiché $\lim_{x\to+\infty} \sin x = \ell$, allora esiste

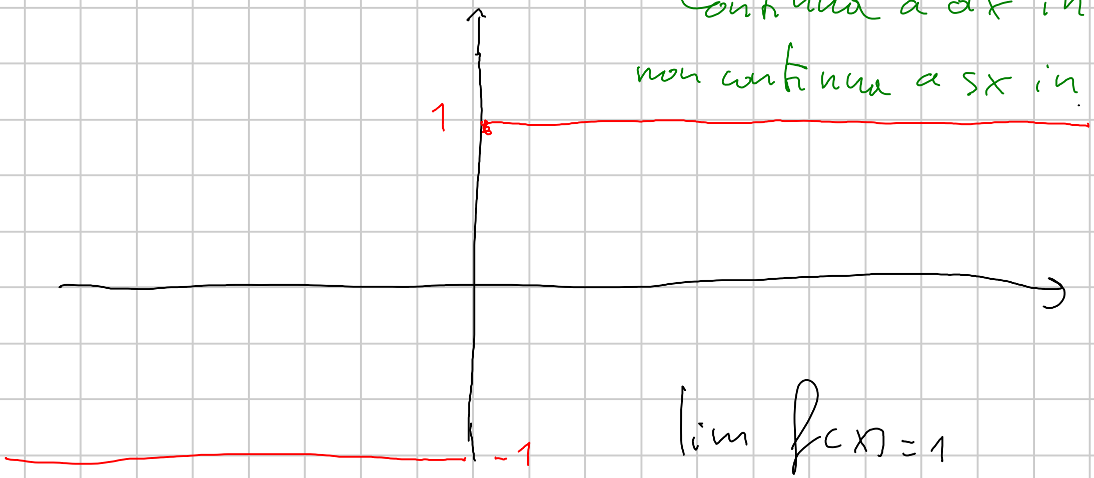
$a \in \mathbb{R}$ t.c. $x > a \Rightarrow \boxed{\ell - \frac{1}{2} < \sin x < \ell + \frac{1}{2}}$

Questo è impossibile, poiché per $x > a$ la funzione $\sin x$ assume infinite volte i valori $-1$ e $1$.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Continua a dx in 0

non continua a sx in 0.




$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\neq$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Quindi $\lim_{x \to 0} f(x)$ non esiste.

Se però considero $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, in questo caso

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$, inoltre $f(0) = 1 \Rightarrow f$ è continua in $0$

Se invece considero $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -1$, $f(0) = 1$, $f$ non è continua in $0$

Def: $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che $f$ e' continua a destra in $x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

continua a sinistra in $x_0$ se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

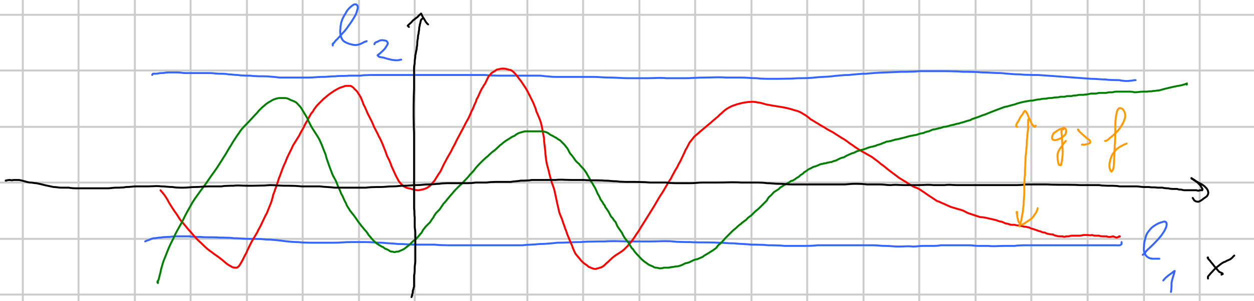
Teorema del confronto.

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$.

Se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

e se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c.

$x \in A \cap U \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x)$, allora $\ell_1 \leq \ell_2$



La disuguaglianza $f(x) \leq g(x)$ (che vale in un intorno di $x_0$)
passa al limite $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$

E se fosse $f(x) < g(x)$?

$A = (0, +\infty) \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = -\frac{1}{x}$

$f(x) < g(x) \quad \forall x > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$

Le disuguaglianze strette tra funzioni possono diventare deboli nel limite, cioè

$$f(x) < g(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

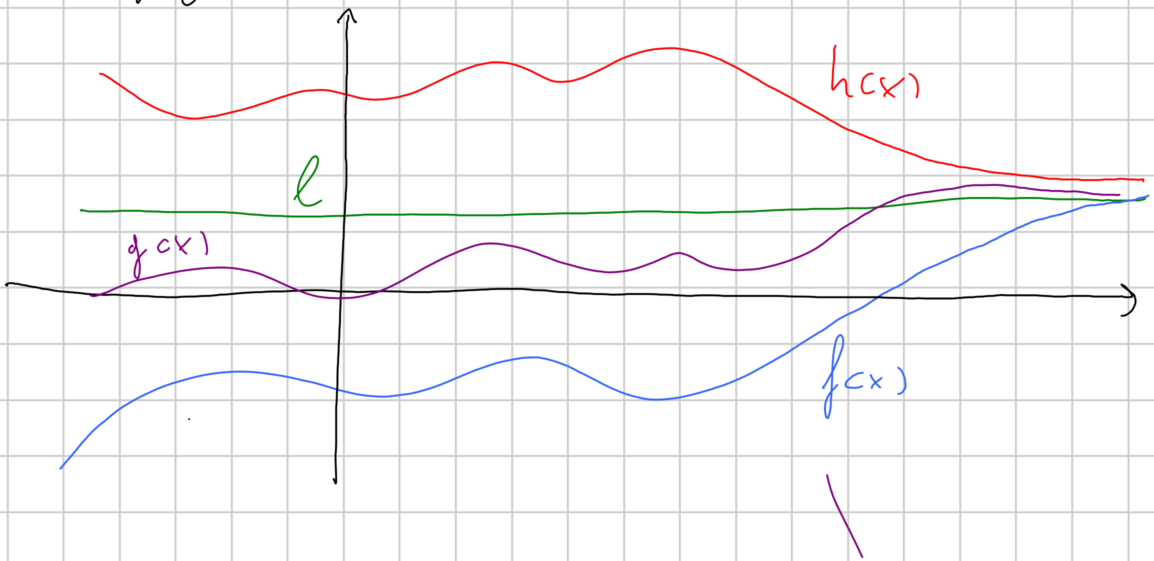
Teorema dei carabinieri:

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g, h : A \to \mathbb{R}$.

Se esistono $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ e

se $\exists\, U \in \mathcal{I}(x_0)$ t.c. $x \in U \cap A \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$$




Esempio: $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2+\sin x}{x}$

Poichè $\sin(x)$ è compreso tra $-1$ e $1$

$$\underbrace{\frac{1}{x}}_{f} = \frac{2-1}{x} \leq \underbrace{\frac{2+\sin x}{x}}_{g} \leq \underbrace{\frac{3}{x}}_{h}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Teorema: (somma e prodotto di limiti).

$A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$. Supponiamo che $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$, e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$. $\ell_1, \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

1) Se ha senso $\ell_1 + \ell_2$, allora

$\exists \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$

2) Se ha senso $\ell_1 \cdot \ell_2$ allora

$\exists \lim_{x \to x_0} (f \cdot g) \cdot (x) = \ell_1 \cdot \ell_2$.