

# Università di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali  
Corso di Laurea in Matematica

Anno Accademico 2009/2010

Tesi di Laurea Specialistica

## STRUTTURE ALGEBRICHE E TOPOLOGICHE NELLA MUSICA DEL VENTESIMO SECOLO

Candidato  
**Leone Slavich**

Relatori  
**Prof.ssa Francesca Acquistapace**  
**Prof. Moreno Andreatta**

Controrelatore  
**Prof. Giovanni Gaiffi**



# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduzione</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 Analisi delle strutture matematiche della musica</b>               | <b>9</b>  |
| 1.1 Fisica del suono . . . . .  | 9         |
| 1.1.1 Dalla frequenza all'altezza . . . . .                             | 10        |
| 1.1.2 L'insieme delle note come $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . . . . .     | 11        |
| 1.2 Da strumenti matematici a strumenti compositivi . . . . .           | 11        |
| 1.2.1 La musica dodecafonica . . . . .                                  | 12        |
| <b>2 Diagrammi di Gauss e serie dodecafoniche</b>                       | <b>15</b> |
| 2.1 Costruzione dei diagrammi di Gauss . . . . .                        | 16        |
| 2.2 Classificazione delle serie dodecafoniche . . . . .                 | 19        |
| 2.3 Numero di serie associate a un diagramma di Gauss . . . . .         | 22        |
| <b>3 Diagrammi di Gauss generalizzati</b>                               | <b>25</b> |
| 3.1 Definizioni . . . . .   | 25        |
| 3.2 I gruppi $E_H$ e $F_H$ . . . . .                                    | 27        |
| 3.3 Numero di serie associate . . . . .                                 | 30        |
| <b>4 Potere di classificazione dei diagrammi di Gauss generalizzati</b> | <b>33</b> |
| 4.1 Scelta dei rappresentanti . . . . .                                 | 35        |
| 4.2 Decomposizione del gruppo $\Omega_S$ . . . . .                      | 42        |
| 4.3 Esempi . . . . .  | 46        |
| 4.3.1 Le trasformazioni affini nella musica seriale . . . . .           | 46        |
| <b>5 Enumerazione dei diagrammi di Gauss generalizzati</b>              | <b>49</b> |
| <b>6 Gli spazi di accordi</b>   | <b>55</b> |
| 6.1 Topologia degli spazi di accordi . . . . .                          | 57        |
| 6.2 Rappresentazione del <i>voice-leading</i> . . . . .                 | 60        |
| 6.3 Gli accordi a <i>trasposizione limitata</i> . . . . .               | 61        |
| 6.3.1 Lo spazio $\mathcal{A}_3$ come fibrato di Seifert . . . . .       | 62        |
| 6.3.2 La fibrazione degli spazi $\mathcal{A}_n$ . . . . .               | 62        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 6.4      | Ulteriori quozienti degli spazi di accordi . . . . . | 64        |
| <b>A</b> | <b>Strucutures 1a</b>                                | <b>67</b> |

# Introduzione

Scopo di questo lavoro è l'esposizione di una serie di risultati riguardanti la teoria matematica della musica, con particolare attenzione a due problemi: la classificazione delle serie dodecafoniche e la modellizzazione matematica degli accordi.

Nel primo capitolo vengono introdotti i concetti di base della teoria matematica della musica, al fine di definire matematicamente l'oggetto musicale elementare: la nota.

A partire da una trattazione della fisica dell'onda sonora, si procede a definire la *frequenza* dell'onda sonora, e successivamente la sua *altezza*. Questa costruzione conduce alla rappresentazione di una nota come un punto sulla retta reale. Successivamente si procede a quotizzare la retta reale tramite la relazione di equivalenza derivata dall'intervallo di ottava, ottenendo un'ulteriore rappresentazione delle note come punti di  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ , la circonferenza.

Infine si introduce la nozione di temperamento equabile a 12 note, ossia la discretizzazione della precedente costruzione, che conduce alla rappresentazione delle note come elementi di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .

Si pone l'accento sulla possibilità di tradurre concetti di natura matematica in concetti di natura musicale, e a tale proposito si fornisce una introduzione ai principi della *musica dodecafonica*, la tecnica compositiva introdotta da Arnold Schönberg nel 1923 quale alternativa all'organizzazione fortemente gerarchica della musica tonale, basata sul concetto di centro tonale (la tonica) e gradi vicini dal punto di vista della consonanza (dominante e sottodominante). Essa prevede di strutturare la composizione di un brano su una *serie dodecafonica*, una successione delle 12 note con la proprietà che ogni nota venga eseguita una sola volta. In termini matematici, una serie dodecafonica non è altro che una permutazione dell'insieme delle note  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , ed è pertanto rappresentata da un elemento del gruppo di permutazioni  $S_{12}$ .

Sono da considerare equivalenti serie ottenute l'una dall'altra tramite un gruppo  $C$  di trasformazioni, le *serie derivate*. Si rende quindi necessario studiare l'insieme  $S_n/C$ . La cardinalità di tale insieme risulta però troppo grande (proposizione 2.1) per poter sperare di ottenere un elenco dei suoi

elementi. Si procede pertanto a introdurre un meccanismo di classificazione delle serie, dato dai *diagrammi di Gauss*.

Il secondo capitolo è dedicato alla presentazione dei diagrammi di Gauss. Essi sono stati introdotti da Franck Jedrzejewski in [1]. A un livello intuitivo, l'idea dei diagrammi di Gauss è di tenere traccia, in una serie  $s$ , della disposizione delle note separate da un intervallo di sei semitoni (ossia la posizione delle note  $x$  e  $y$  tali che  $x - y = 6 \pmod{12}$ ). Si dimostra in particolare che due serie derivate una rispetto all'altra hanno lo stesso diagramma di Gauss associato.

Dopo aver definito i diagrammi di Gauss, si procede allo studio della classificazione ottenuta a partire da essi. Più in dettaglio, si definisce l'azione di un gruppo  $\Gamma$  sull'insieme  $S_{12}$  delle serie dodecafoniche, e si dimostra che due serie  $s$  e  $t$  hanno lo stesso diagramma di Gauss associato *se e solo se* appartengono alla stessa orbita per l'azione del gruppo  $\Gamma$ . Viene esibita la struttura di tale gruppo.

Infine si stabilisce, dato un generico diagramma di Gauss  $D$ , quante sono le serie  $s \in S_{12}$  che hanno  $D$  come diagramma associato. Si mostra la relazione tra il numero di serie associate a un diagramma e le simmetrie del diagramma stesso: maggiori sono le simmetrie del diagramma, tanto più piccola è la corrispondente classe di equivalenza in  $S_{12}$ .

Nel terzo capitolo viene introdotto il concetto di *diagramma di Gauss generalizzato*. Come si evince dal nome, si tratta di una generalizzazione della costruzione precedente. Nel caso classico, il diagramma associato a una serie dipende dalla posizione delle coppie di note  $x$  e  $y$  tali che  $x - y = 6 \pmod{12}$ , ossia dalla posizione delle note appartenenti a una stessa classe laterale per il sottogruppo  $K = \langle 6 \rangle$  di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .

Si può però tenere conto della posizione di note appartenenti a una medesima classe laterale per un generico sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , ottenendo ciò che chiameremo un *diagramma di Gauss generalizzato* di ordine 12 con  $H$  come sottogruppo caratteristico. Generalizzando ulteriormente tale approccio, è possibile classificare serie di lunghezza arbitraria  $n$ , ottenute quindi a partire dal temperamento equabile a  $n$  note, fissando un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  e costruendo il diagramma di Gauss generalizzato di ordine  $n$  con  $H$  come sottogruppo caratteristico.

Il terzo capitolo è dedicato a tale generalizzazione: fissato un sottogruppo caratteristico  $H < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , si studia la classificazione delle serie ottenuta tramite l'azione di un gruppo  $\Gamma_H$  di cui viene esibita la struttura, e si mostra nuovamente la relazione tra il gruppo di simmetrie di un diagramma generalizzato e il numero di serie ad esso associate.

Nel quarto capitolo si affronta il seguente problema: fissato un intero  $n$  a meno di quali trasformazioni è possibile classificare l'insieme  $S_n$  delle serie tramite il meccanismo dei diagrammi di Gauss generalizzati? Più precisamente, fissato un insieme  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m\}$  di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  e una serie  $s$ , è possibile costruire l'insieme dei diagrammi generalizzati associati a

$s$  con gli  $H_i$  come sottogruppi caratteristici  $D_s^{H_1}, \dots, D_s^{H_m}$ . Vogliamo stabilire quali serie  $t$  hanno gli stessi diagrammi di Gauss associati, ossia le serie  $t$  tali che  $D_s^{H_i} = D_t^{H_i}$  per ogni  $i$ . Si tratta quindi di studiare l'intersezione dei gruppi di invarianza  $\Gamma_{H_i}$  dei diagrammi. Il quarto capitolo è dedicato allo studio di tale problema, e si conclude con due esempi di calcolo esplicito.

Il quinto capitolo è invece dedicato al problema dell'*enumerazione* dei diagrammi di Gauss. Ci si chiede, fissato un intero  $n$  e un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , quanti siano i diagrammi di Gauss generalizzati con  $H$  come sottogruppo caratteristico. Il caso standard  $n = 12$ ,  $H = \langle 6 \rangle$  è già stato trattato da Andrei Khruzin in [2]. Si generalizza il suo approccio, che sfrutta un argomento di de Bruijn ([4] e [5]) al caso generale, e si fornisce una formula esplicita per il calcolo.

Nel sesto capitolo si abbandona lo studio delle serie e delle loro proprietà combinatorie per spostarsi su un problema di natura geometrica: la modellizzazione matematica degli accordi. Si vuole rappresentare l'insieme degli accordi di  $n$  note come uno spazio metrico  $\mathcal{A}_n$ . Questa costruzione si deve a Dmitri Tymoczko ([6] e [7]). Si pone particolare accento sulla struttura degli spazi ottenuti, che risultano essere degli *orbifolds* e muniti di una decomposizione in fibre isomorfe a  $S^1$  che, nel caso particolare  $n = 3$ , dà allo spazio  $\mathcal{A}_3$  la struttura di un *fibrato di Seifert*. Viene mostrata la relazione tra tale fibrazione e la proprietà di alcuni accordi di essere accordi a *trasposizione limitata*. Si mostra inoltre la relazione tra la topologia dello spazio  $\mathcal{A}_n$  nell'intorno di un punto  $x$ , e la proprietà del corrispondente accordo di essere singolare, ossia di contenere delle note ripetute.

Infine, si introducono due ulteriori relazioni di equivalenza, quelle di trasposizione e inversione, sugli spazi  $\mathcal{A}_n$ , e si esibisce la struttura degli orbifolds così ottenuti.

Nell'appendice in coda alla tesi viene proposta l'analisi di un brano musicale: *Structures 1a* di Pierre Boulez. Si tratta di un celebre esempio di applicazione dei principi del serialismo integrale: i parametri caratteristici delle note della composizione sono determinati da una serie e dalle sue derivate secondo un procedimento puramente matematico. Con tale approccio la matematica stessa diventa uno strumento *compositivo*.





# Capitolo 1

## Analisi delle strutture matematiche della musica

L'analisi delle strutture matematiche della musica ha una storia plurimillenaria. Si sa per certo che se ne occuparono gli antichi greci, allo scopo di stabilire criteri per la consonanza e la dissonanza delle note. Le ragioni per cui la musica si presta bene a un'analisi condotta con strumenti di tipo matematico sono molteplici. In questo capitolo, cercheremo di individuarne alcune.

### 1.1 Fisica del suono

Innanzitutto vi sono ragioni di tipo *fisico*, più precisamente legate alla fisica dell'onda acustica. Un'onda acustica è descrivibile tramite una funzione

$$u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

dove  $u(x, t)$  rappresenta la pressione dell'aria nel punto  $x \in \mathbb{R}^3$  al tempo  $t \in \mathbb{R}$ . La funzione  $u$  deve soddisfare *l'equazione d'onda*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \nabla^2 u \quad (1.1)$$

dove il laplaciano a secondo membro è calcolato sulle componenti spaziali e  $c$  è una costante che rappresenta la velocità di propagazione dell'onda acustica nell'aria.

Supponiamo che un ascoltatore si trovi in un punto  $x$  dello spazio. Il suono percepito dall'ascoltatore è il dato della funzione  $g$  definita da

$$g(t) = u(x, t).$$

La funzione  $g$  più semplice che possiamo aspettarci di percepire è quella caratteristica di un'onda pura, la quale sarà del tipo

$$g(t) = P + A(t) \cdot (\sin 2\pi ft + \theta)$$

dove  $P$  è la pressione media dell'aria e  $\theta$  è la fase dell'oscillazione, ed è determinata dal valore di  $g$  all'istante  $t = 0$ . I restanti parametri in gioco sono l'ampiezza  $A$  e la frequenza  $f$ . Il valore di questi parametri fisici è percepito dal cervello umano e tradotto in parametri caratteristici del suono.

Più precisamente l'ampiezza dell'onda è responsabile della nostra percezione dell'intensità del suono (in altre parole, il volume).

Dalla frequenza dipende (in un modo che sarà esposto nella prossima sezione) l'altezza del suono che percepiamo (suoni alti per frequenze alte e suoni bassi nel caso di frequenze basse). Vi è pertanto una correlazione naturale tra grandezze caratteristiche dei suoni da noi percepiti e parametri fisici delle onde acustiche, descrivibili tramite strumenti matematici.

Il tipo di onda acustica più semplice prodotta da uno strumento musicale, ossia una *nota*, non è un'onda pura. Per ragione fisiche, fenomeni quali, ad esempio, la vibrazione di una corda, producono onde che sono *somme* di onde pure

$$P + \sum_n A_n(t) \cdot (\sin 2\pi nft) \quad (1.2)$$

di frequenze *multiple* della frequenza fondamentale  $f$ . Le onde di frequenza multipla della fondamentale si chiamano *armoniche*. La frequenza di una nota è comunque definita come la  $f$  dell'equazione 1.2.

### 1.1.1 Dalla frequenza all'altezza

La differenza di altezza tra due note di frequenze  $f_1$  e  $f_2$ , così come viene percepita dall'orecchio umano, è proporzionale al rapporto  $f_2/f_1$  tra le frequenze. Diventa pertanto naturale definire l'*intervallo* tra due note di frequenze  $f_1$  e  $f_2$  come

$$i(f_1, f_2) = \frac{1}{\log(2)} \cdot \log(f_2/f_1). \quad (1.3)$$

Si può a questo punto definire l'*altezza*  $\alpha(f_2)$  di una nota di frequenza  $f_2$  come  $i(f, f_2)$ , dove  $f$  è una frequenza fissata (tradizionalmente quella del Do centrale) e, considerando come parametro caratteristico di una nota l'altezza della sua frequenza fondamentale, si ottiene una rappresentazione della nota stessa come di un punto sulla retta reale.

Dall'equazione 1.3 segue

$$\alpha(f_2) - \alpha(f_1) \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \frac{f_2}{f_1} = 2^n. \quad (1.4)$$

Due note le cui altezze soddisfino l'equazione 1.4 (in termini musicali, tali che l'intervallo tra di loro sia di un certo numero di *ottave*) vengono

percepite dal cervello come estremamente consonanti, al punto che è possibile considerarle come *qualitativamente* equivalenti. Diventa quindi naturale introdurre su  $\mathbb{R}$  la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Si ottiene così una rappresentazione di una nota come un punto di

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1.$$

### 1.1.2 L'insieme delle note come $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Gran parte degli strumenti musicali sono in grado di produrre solo un numero finito di note, dal momento che è finito il numero dei corpi vibranti a loro disposizione (si pensi alle corde di un pianoforte). Per questo motivo, si è reso storicamente necessario scegliere dei *temperamenti* dell'ottava, ossia stabilire dei sottoinsiemi finiti  $T \subset S^1$ , corrispondenti alle note effettivamente eseguibili da parte degli strumenti musicali, che soddisfacessero i seguenti criteri:

1. Una cardinalità non troppo elevata.
2. Una buona approssimazione, fissato un qualsiasi elemento  $x \in T$ , delle armoniche di  $x$  tramite elementi  $y \in T$ .

Lo studio dei temperamenti ha una storia troppo lunga per essere esposta in questo lavoro. Il temperamento che si è imposto in epoca moderna, per lo meno nella cultura musicale occidentale, è quello che si ottiene dividendo l'ottava in dodici parti uguali, che ha la proprietà di mantenere costante l'intervallo tra una nota e la successiva in ordine di altezza (tale intervallo è detto semitono). Il corrispondente insieme  $T$  è dato da dodici punti equidistanti di  $S^1$ . Questa discretizzazione porta a un'isomorfismo tra  $T$  e l'insieme  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  degli interi modulo dodici. Tale temperamento ha il nome di *temperamento equabile* a 12 note. Si può ovviamente generalizzare tale costruzione dividendo l'ottava in  $n$  parti uguali, ottenendo il temperamento equabile a  $n$  note.

## 1.2 Da strumenti matematici a strumenti compositivi

L'identificazione tra l'insieme delle note e il gruppo degli interi modulo dodici ha un vantaggio, permette di tradurre operazioni matematiche in operazioni musicali. Più precisamente un oggetto musicale, ad esempio una scala o un accordo, sarà costruito a partire da  $n$ -uple di note e quindi, in virtù della nostra identificazione, a partire da  $n$ -uple elementi di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Allora possiamo aspettarci che strutture *matematiche*, come possono essere operazioni

o relazioni di equivalenza, si traducano in operazioni e relazioni su oggetti musicali. Tralasciando il problema complesso dell'emergenza delle strutture matematiche e, in particolare, algebriche, nella musica ([18]), ci limitiamo ad osservare che questo meccanismo e' da sempre usato, più o meno consapevolmente, da compositori. Nella prossima sezione ne formiremo un esempio concentrandoci su una delle più celebri tecniche compositive del XX secolo: la tecnica dodecafonica.

### 1.2.1 La musica dodecafonica

La dodecaфония è una tecnica compositiva ideata da Arnold Schönberg (1874-1951) ed esposta in un articolo del 1923 intitolato *Komposition mit 12 Tönen*.

La musica tonale, che per secoli aveva costituito l'ambito privilegiato di composizione, attribuisce pesi diversi alle diverse note, in relazione all'intervallo che intercorre con una nota fondamentale detta *tonica*. Il criterio per l'attribuzione di questo peso è dettato dalla maggiore o minore consonanza della nota stessa con la tonica, e in questo senso un'applicazione ortodossa delle tecniche compositive proprie della musica tonale porta ad evitare le dissonanze tra note.

Già dalla fine del diciannovesimo e l'inizio del ventesimo secolo si comincia ad assistere al superamento delle regole proprie della musica tonale, ma è Schönberg a sintetizzare queste esperienze in un nuovo sistema: esso prevede che tutte le note abbiano lo stesso peso all'interno di un brano, si vuole cioè evitare la presenza di un centro tonale riconoscibile, facendo in modo che nessuna nota venga eseguita più frequentemente delle altre. Lo stesso Schönberg in *Komposition mit 12 Tönen* scrive:

*“The construction of a basic set of twelve tones derives from the intention to postpone the repetition of every tone as long as possible. I have stated in my Harmonielehre that the emphasis given to a tone by premature repetition is capable of heightening it to the rank of a tonic. But the regular application of a set of twelve tones emphasizes all other tones in the same manner, thus depriving one single one of the privilege of supremacy.”*

Schönberg suggerisce di strutturare la composizione su una *serie dodecafonica*, cioè una successione  $(a_0, a_2, \dots, a_{11})$  di note  $a_i \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , tale che tutte le note compaiano *una e una sola volta*.

In altre parole, una serie dodecafonica altro non è che una permutazione delle note della *scala cromatica*  $(0, 1, \dots, 11)$ , ed è *rappresentata* da un elemento del gruppo di permutazioni di dodici elementi  $S_{12}$ .

Tale rappresentazione si ottiene nel modo seguente: alla serie

$$s = (a_0, a_1, \dots, a_{11})$$

con  $a_i \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  associamo la permutazione  $\sigma_s$  tale che  $\sigma_s(i) = a_i$ . Per evitare di complicare la notazione, nel seguito useremo la scrittura  $s(i)$  in luogo di  $\sigma_s(i)$  per indicare l' $i$ -esima nota della serie  $s$  e, a seconda dei casi, useremo una delle due rappresentazioni (come successione o come permutazione).

Data una serie  $s = (a_0, \dots, a_{11})$ , sono da considerarsi equivalenti a  $s$  le serie ottenute tramite le seguenti trasformazioni:

1. Le trasposizioni  $T^n$ :  $T^n \cdot s = (a_0 + n, a_1 + n, \dots, a_{11} + n)$  per  $n \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ .  $T^n$  può essere scritta come  $(T^1)^n$ .  $T^1$  ha periodo 12 e, nella rappresentazione di  $s$  come una permutazione, agisce *a sinistra* tramite composizione con il ciclo  $(0, 1, \dots, 11)$ , ossia

$$T^1 \cdot s(i) = s(i) + 1.$$

2. L'inversione  $I$ :  $I \cdot s = (-a_0, -a_1, \dots, -a_{11})$ .  $I$  ha periodo 2 e, come sopra, nella rappresentazione di  $s$  come una permutazione la sua azione equivale alla composizione *a sinistra* con il prodotto di trasposizioni  $(1, 11)(2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)$ , ossia

$$I \cdot s(i) = -s(i).$$

3. La retrogradazione  $R$ :  $R \cdot s = (a_{11}, a_{10}, \dots, a_1, a_0)$ , che consiste nell'eguire la serie al contrario, dall'ultima nota alla prima.  $R$  ha periodo due, ma in questo caso rappresentando le serie come una permutazione, si ha un'azione *a destra* rappresentata dalla composizione per il prodotto di trasposizioni  $(1, 11)(2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)$ , ossia

$$R \cdot s(i) = s(11 - i).$$

4. Le composizioni delle precedenti.

Si noti come, nel caso delle trasposizioni e dell'inversione, le operazioni *algebriche* proprie del gruppo  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  si traducano in operazioni sull'oggetto musicale (l'insieme delle serie).

**Lemma 1.1.** *Il gruppo  $C$  generato da  $T^1$ ,  $I$  ed  $R$  è isomorfo a  $\mathbb{D}_{12} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (dove  $\mathbb{D}_n$  indica il gruppo diedrale di  $2n$  elementi).*

*Dimostrazione.* 1.  $IT^1I = (T^1)^{-1} = T^{11}$ . Infatti

$$IT^1I \cdot s(i) = IT^1 \cdot (-s(i)) = I \cdot (-s(i) + 1) = s(i) - 1 = T^{11} \cdot s(i).$$

In virtù di tale relazione, il gruppo generato da  $T$  e  $I$  è isomorfo al gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$  di 24 elementi; identificando  $T$  con il ciclo  $(0, 1, \dots, 11)$  e  $I$  con il prodotto di trasposizioni  $(1, 11)(2, 10)(3, 9)(4, 8)(5, 7)$  si ha quindi un'immersione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$  nel gruppo di permutazioni  $S_{12}$ .

2.  $R$  e  $I$  commutano. Infatti

$$IRI \cdot s(i) = IR \cdot (-s(i)) = I \cdot (-s(11 - i)) = s(11 - i) = R \cdot s(i).$$

3.  $R$  e  $T^1$  commutano. Infatti

$$RT^1R \cdot s(i) = RT^1 \cdot s(11 - i) = R \cdot (s(11 - i) + 1) = s(i) + 1 = T^1 \cdot s(i).$$

□

In particolare, scrivendo  $C \cong \mathbb{D}_{12} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , l'azione sull'insieme  $S_{12}$  delle serie si decompone in un'azione *a sinistra* del primo fattore e in un'azione *a destra* del secondo, cioè se  $g = (a, b) \in \mathbb{D}_{12} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$g \cdot s = a \circ s \circ b$$

nella rappresentazione della serie come una permutazione.

Gli elementi dell'orbita di una serie  $s$  per l'azione di  $C$  sono dette *serie derivate* da  $s$ . Da un punto di vista compositivo, la musica dodecafonica prevede di strutturare un brano sull'esecuzione di una serie  $s$  e delle sue derivate, pertanto elemento caratteristico di una tale composizione è un elemento dell'insieme

$$S_n/C.$$

## Capitolo 2

# Diagrammi di Gauss e serie dodecafoniche

Le serie dodecafoniche costituiscono un insieme estremamente grande. In effetti ciascuna di esse altro non è che una permutazione delle note della scala cromatica  $c = (0, 1, \dots, 11)$ , pertanto ve ne sono ben  $12!$ .

Ciò che interessa veramente è l'insieme delle serie derivate  $S_n/C$ . Vale il seguente risultato:

**Proposizione 2.1.**

$$|S_n/C| = 9985920$$

Riportiamo di seguito la dimostrazione, contenuta nel libro di Franck Jedrzejewski *Mathematical theory of music* [1] a pagina 109.

*Dimostrazione.* Per il lemma di Burnside ([3]), poichè si ha l'azione di un gruppo finito  $C$  sull'insieme  $S_n$ , il numero di orbite è uguale alla media dei punti fissi, cioè

$$|S_n/C| = \frac{1}{|C|} \sum_{g \in C} |X_g| \quad (2.1)$$

dove  $X_g = \{x \in S_n | g \cdot x = x\}$ .

Gli elementi  $T^n$  per  $n \in \{1, \dots, 11\}$ ,  $T^n R$  per  $n \neq 6$ ,  $T^n I$  per  $n \in \{0, \dots, 11\}$  e  $T^n IR$  per  $n$  pari non hanno punti fissi, mentre l'identità ne ha ovviamente  $12!$ . Rimangono da studiare i punti fissi di sette elementi di  $C$ :  $T^6 R$  e  $T^n IR$  per  $n$  dispari.

1. Le serie  $s = (a_0, \dots, a_{11})$  invarianti per  $T^6 R$  sono quelle per cui vale

$$a_i = a_{11-i} + 6$$

per ogni  $i \in \{0, \dots, 5\}$ . Pertanto è sufficiente scegliere le prime sei note  $a_0, \dots, a_5$  in modo che, per ogni  $i \neq j \in \{0, \dots, 5\}$ ,  $a_i - a_j \neq 6$  e le altre saranno determinate. Per fare ciò abbiamo  $12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 2^6 \cdot 6!$  possibilità.

2. Stesso ragionamento si applica alle trasformazioni del tipo  $T^n IR$  per  $n$  dispari. Le serie  $s = (a_0, \dots, a_{11})$  invarianti per  $T^n IR$  sono quelle per cui vale

$$a_i = n - a_{11-i}.$$

Di nuovo, le prime sei note  $a_0, \dots, a_5$  determinano la serie, posto che, per ogni  $i, j \in \{0, \dots, 5\}$  valga  $a_i + a_j \neq n$ . Pertanto, per ogni  $n$ , ci sono nuovamente  $2^6 \cdot 6!$  serie invarianti per  $T^n IR$ .

Dal momento che  $C$  ha 48 elementi, sostituendo in 2.1 si ottiene

$$|S_n/C| = \frac{12! + 7 \cdot 2^6 \cdot 6!}{48} = 9985920.$$

□

La proposizione 2.1 ci dice che non possiamo sperare di elencare tutte le serie dodecafoniche, nemmeno sfruttando la relazione di equivalenza data da  $C$ . Quello che vogliamo fare è costruire una classificazione delle serie dodecafoniche in cui serie derivate sono identificate, ma che raggruppi le serie stesse in un numero minore di insiemi, possibilmente elencabile. È questo lo scopo dei *diagrammi di Gauss*.

## 2.1 Costruzione dei diagrammi di Gauss

La costruzione del diagramma di Gauss associato a una serie dodecafonica si deve a Franck Jedrzejewski. Per ulteriori informazioni, si veda [1]. Vogliamo associare a ogni serie dodecafonica  $s$  un diagramma  $D_s$  detto *diagramma di Gauss*. A partire da  $s = (a_0, \dots, a_{11})$  procediamo nel modo seguente:

1. Prendiamo dodici punti equidistanti su una circonferenza, e fissiamo arbitrariamente un punto iniziale  $p_0$  e una orientazione.
2. A partire da  $p_0$ , seguendo l'orientazione fissata, etichettiamo via via ogni punto  $p_i$  con la nota  $a_i$ .
3. Uniamo con dei segmenti le coppie di punti  $(p_i, p_j)$  le cui etichette  $a_i$  e  $a_j$  sono separate da un intervallo di sei semitoni ( $a_i - a_j = 6 \pmod{12}$ ).
4. Cancelliamo le etichette.

Quello che rimane è il diagramma di Gauss associato alla serie di partenza. Per l'arbitrarietà della scelta dell'orientazione e del punto iniziale, i diagrammi di Gauss sono definiti a meno dell'azione del gruppo di simmetria del dodecagono regolare, ossia il gruppo diedrale di 24 elementi  $\mathbb{D}_{12} = \langle \rho, \sigma \rangle$ , con  $\rho$  che agisce tramite rotazione, e  $\sigma$  che agisce come riflessione rispetto a un asse.



L'idea dei diagrammi di Gauss è in sostanza quella di *tenere traccia della disposizione degli intervalli di tritono* all'interno della serie dodecafonica.

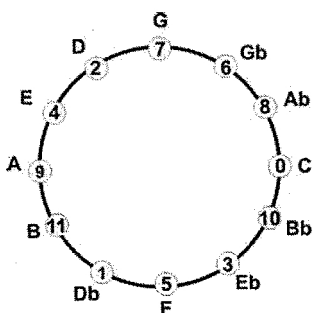
Per rendere più chiara la costruzione precedente, forniamo un esempio. Le figure di seguito sono tratte dal testo *Mathematical Theory of Music* [1]. Consideriamo la serie dodecafonica seguente:

$$s = (\text{Do}, \text{Lab}, \text{Solb}, \text{Sol}, \text{Re}, \text{Mi}, \text{La}, \text{Si}, \text{Reb}, \text{Fa}, \text{Mib}, \text{Sib})$$

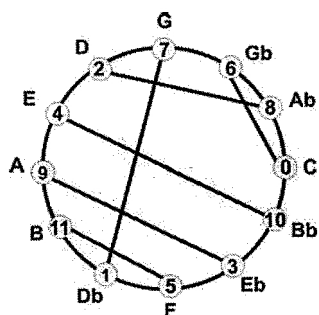
Sfruttando l'identificazione delle note con l'insieme  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  (dove l'elemento 0 corrisponde alla nota Do), questa serie può essere rappresentata come:

$$s = (0, 8, 6, 7, 2, 4, 9, 11, 1, 5, 3, 10)$$

Disponiamo le note della serie come nel punto (2) precedente.



Uniamo con dei segmenti le note separate da intervalli di tritono.



Cancelliamo le etichette, conservando la sola struttura. Otteniamo il diagramma di Gauss associato alla serie  $s$ .

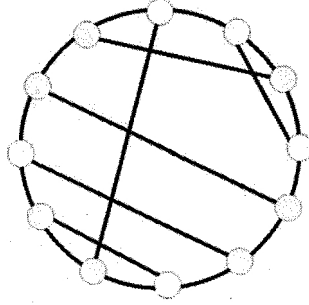


Figura 2.1: Diagramma di Gauss associato alla serie  $s$

Per formalizzare la costruzione precedente, sia  $\mathcal{P}$  l'insieme delle partizioni di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  in sei coppie di elementi. Su  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ , e di conseguenza su  $\mathcal{P}$  abbiamo l'azione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12} = \langle \rho, \sigma \rangle$ .

**Definizione 2.2.** *Un diagramma di Gauss è un elemento dell'insieme*

$$\mathcal{P}/\mathbb{D}_{12}.$$

**Definizione 2.3.** *Data una serie  $s = (a_0, a_1, \dots, a_{11}) \in S_{12}$  definiamo partizione associata alla serie  $s$ , e indichiamo con  $P_s$ , la partizione di  $\{0, \dots, 11\}$  in 6 coppie, dove  $(i, j) \in P_s$  se e solo se le note  $a_i$  e  $a_j$  sono separate da un intervallo di tritono ( $a_i - a_j = 6 \pmod{12}$ ).*

**Definizione 2.4.** *Data una serie  $s \in S_{12}$ , si dice diagramma di Gauss associato a  $s$ , e si indica  $D_s$  la classe della partizione associata  $P_s$  in  $\mathcal{P}/\mathbb{D}_{12}$ .*

**Proposizione 2.5.** *A partire da una data serie  $s$ , il diagramma di Gauss ad essa associato coincide col diagramma associato a una qualsiasi delle serie derivate (quelle ottenute per trasposizione, inversione e retrogradazione).*

*Dimostrazione.* Per ogni  $n$  e per ogni serie  $s$  vale  $P_{T^n \cdot s} = P_s$ , e  $P_{I \cdot s} = P_s$ . Infatti, se  $x - y = 6 \pmod{12}$ , allora

$$T^n(x) - T^n(y) = x + n - (y + n) = x - y = 6 \pmod{12}.$$

Similmente per l'inversione

$$I(x) - I(y) = y - x = 6 \pmod{12}.$$

Per quanto riguarda la retrogradazione, vale  $P_{R \cdot s} = d \cdot P_s$ , con  $d = T^1 I$ , ossia le due partizioni si ottengono l'una dall'altra tramite riflessione rispetto alla bisettrice tra i punti  $p_0$  e  $p_{11}$ .  $\square$

## 2.2 Classificazione delle serie dodecafoniche

**Proposizione 2.6.** *Il numero di diagrammi di Gauss a meno dell'azione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$  è 554.*

Una dimostrazione di questo risultato è stata fornita da Andrei Khruzin nell'articolo *Enumeration of chord diagrams* [2]. Per maggiori dettagli, si veda il quinto capitolo di questo lavoro.

In virtù di 2.1, 2.5 e 2.6 più serie, non necessariamente derivate una rispetto all'altra, devono essere riconducibili a uno stesso diagramma. Mostriamo come generare tutte le serie riconducibili a un dato diagramma a partire da una serie data, e studieremo la relazione tra il gruppo di simmetrie di un dato diagramma di Gauss e il numero di serie ad esso riconducibili. Per fare ciò sarà necessario definire un'azione di un gruppo  $\Gamma$  sull'insieme  $S_{12}$  delle serie dodecafoniche.

Procediamo definendo i seguenti operatori sullo spazio  $S_{12}$  delle serie dodecafoniche:

1.  $\sigma_i$  per  $i = 0, \dots, 5$  che agisce su una serie  $s$  permutando la posizione delle note  $i$  e  $i + 6$ . Più precisamente, se

$$s(k) = i, s(k') = i + 6$$

allora

$$\sigma_i \cdot s(k') = s(k) = i, \sigma_i \cdot s(k) = s(k') = i + 6$$

e le altre note della serie rimangono invariate.

2.  $\gamma_{ij}$  per  $i, j = 0, \dots, 5$   $i \neq j$  che agisce permutando la posizione degli insiemi di note  $\{i, i + 6\}$  e  $\{j, j + 6\}$ . Se

$$s(k) = i, s(k') = i + 6, s(h) = j, s(h') = j + 6$$

allora

$$\gamma_{ij} \cdot s(k) = s(h) = j, \gamma_{ij} \cdot s(k') = s(h') = j + 6.$$

$$\gamma_{ij} \cdot s(h) = s(k) = i, \gamma_{ij} \cdot s(h') = s(k') = i + 6.$$

3.  $p$  che agisce come una permutazione ciclica nella posizione delle note:

$$p \cdot (a_0, a_1, \dots, a_{10}, a_{11}) = (a_{11}, a_0, a_1, \dots, a_{10}).$$

$$p \cdot s(i) = s(i - 1).$$

4.  $r$  che agisce come una retrogradazione sulla serie:

$$r \cdot (a_0, a_1, \dots, a_{10}, a_{11}) = (a_{11}, a_{10}, \dots, a_1, a_0).$$

$$r \cdot s(i) = s(11 - i).$$

**Osservazione 2.7.** Le operazioni  $\sigma_i$  e  $\gamma_{ij}$  agiscono tramite operazioni algebriche sulle note della serie, mentre  $p$  e  $r$  agiscono sugli indici delle note. In virtù di questo fatto, si verifica che il gruppo  $G$  di permutazioni generato dalle  $\sigma_i$  e dalle  $\gamma_{ij}$  agisce su  $S_{12}$  a sinistra.

Il gruppo generato da  $p$  e  $r$  è invece isomorfo al gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$  ed agisce sulle serie tramite un'azione a destra.

**Lemma 2.8.** Le azioni dei gruppi  $G$  e  $\mathbb{D}_{12}$  sull'insieme delle serie  $S_{12}$  commutano. Perciò è possibile definire un'azione del gruppo

$$\Gamma \cong \mathbb{D}_{12} \times G$$

sull'insieme  $S_{12}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $s = (a_0, \dots, a_{11}) \in S_{12}$ , e  $d \in \mathbb{D}_{12}$ ,  $g \in G$ . Allora

$$dgd^{-1} \cdot s = dg \cdot (a_{d^{-1}(0)}, \dots, a_{d^{-1}(11)}) = d \cdot (g(a_{d^{-1}(0)}), \dots, g(a_{d^{-1}(11)})).$$

Poniamo

$$b_i = g(a_{d^{-1}(i)}).$$

Allora vale

$$dgd^{-1} \cdot s = (b_{d(0)}, \dots, b_{d(11)}).$$

Poichè

$$b_{d(i)} = g(a_{dd^{-1}(i)}) = g(a_i)$$

si ottiene

$$dgd^{-1} \cdot s = (g(a_0), \dots, g(a_{11})) = g \cdot s.$$

□

**Definizione 2.9.** Dati due gruppi  $E$  ed  $F$  e un omomorfismo

$$\phi : F \rightarrow \text{Aut}(E)$$

dove  $\text{Aut}(E)$  indica il gruppo di automorfismi di  $E$ , si definisce prodotto semidiretto di  $E$  e  $F$ , e si indica con

$$E \rtimes_{\phi} F$$

il gruppo i cui elementi sono le coppie  $(e, f)$  con  $e \in E$  e  $f \in F$ , con regola di moltiplicazione data da

$$(e_1, f_1) \cdot (e_2, f_2) = (e_1 \cdot \phi_{f_1} e_2, f_1 \cdot f_2)$$

dove  $\phi_f$  indica l'immagine di  $f$  tramite  $\phi$ .

**Osservazione 2.10.** Sia dato un gruppo  $G$  e suoi sottogruppi  $E$  ed  $F$  tali che

1.  $E$  è un sottogruppo normale di  $G$ .
2.  $E$  ed  $F$  generano  $G$ .
3.  $E \cap F = 1$

Allora

$$G \cong E \rtimes_{\phi} F$$

$$\text{con } \phi_f e = f \cdot e \cdot f^{-1}$$

*Dimostrazione.* Sia  $\rho$  l'omomorfismo da  $E \rtimes_{\phi} F$  a  $G$  definito da  $\rho \cdot (e, f) = e \cdot f$ . Grazie all'ipotesi 3 tale isomorfismo è iniettivo poichè

$$\rho \cdot (e, f) = e \cdot f = 1 \Leftrightarrow e = f^{-1} \in E \cap F \Leftrightarrow e = f = 1$$

Grazie alle ipotesi 1 e 2 gli elementi del tipo  $e \cdot f$  con  $e \in E$  e  $f \in F$  generano  $G$ , ma essi costituiscono l'immagine di  $\rho$  che pertanto è surgettivo, e quindi un isomorfismo.  $\square$

D'ora in poi, dati un gruppo  $G$  e sottogruppi  $E$  ed  $F$ , scrivendo  $G \cong E \rtimes F$ , sottointenderemo che l'azione di  $F$  su  $E$  sia data dal coniugio (e pertanto che  $E$  sia normale in  $G$ ).

**Osservazione 2.11.**  $G$  è isomorfo al prodotto semidiretto  $E \rtimes F$  dei suoi sottogruppi  $E = \langle \sigma_i \rangle$  e  $F = \langle \gamma_{ij} \rangle$ ,

*Dimostrazione.*  $G$  è generato per definizione da  $E$  ed  $F$ . Una permutazione  $\sigma$  in  $E$  agisce fissando tutti gli insiemi della forma  $\{i, i+6\}$  (poichè i generatori di  $E$  stesso hanno questa proprietà). Inoltre ogni elemento di  $F$  che fissi un insieme della forma  $\{i, i+6\}$  è l'identità su tale insieme. Per cui un elemento di  $E \cap F$  è l'identità su tutti gli insiemi della forma  $\{i, i+6\}$  (che costituiscono una partizione di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ) e quindi  $E \cap F = 1$ .

Infine  $E$  è invariante per coniugio per elementi di  $F$ . Basta verificarlo sui generatori dei due gruppi, e in effetti vale

$$\gamma_{ij} \sigma_i \gamma_{ij}^{-1} = \sigma_j, \quad \gamma_{ij} \sigma_k \gamma_{ij}^{-1} = \sigma_k.$$

La tesi segue pertanto dall'osservazione 2.10.  $\square$

**Lemma 2.12.** *Date serie  $s, t \in S_{12}$ , vale*

$$P_s = P_t \Leftrightarrow \exists g \in G : g \cdot s = t.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo due serie  $s$  e  $t$  tali che  $P_s = P_t$ , e mostriamo che sono in relazione tramite un elemento di  $G$ . A meno di applicare le  $\gamma_{ij}$ , si possono permutare le note di  $s$  in modo che a una data coppia  $\{i, j\}$

della partizione  $P_s = P_t$  corrisponda, nelle due serie, la stessa coppia di note  $\{k, k + 6\}$ , ossia

$$\{s(i), s(j)\} = \{k, k + 6\}, \{t(i), t(j)\} = \{k, k + 6\}.$$

Infine, tramite le  $\sigma_i$ , permutare se necessario le note di ciascuna coppia fino a ottenere la serie  $t$ .

Per l'altra implicazione, è sufficiente notare che,  $\forall g \in G$  e  $\forall s \in S_{12}$  vale  $P_s = P_{g \cdot s}$ .  $\square$

**Proposizione 2.13.** *Abbiamo definito due azioni del gruppo diedrale: la prima è sull'insieme  $\mathcal{P}$  delle partizioni, ed è indotta dalla naturale azione su  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  generata da  $\rho$  ( $x \rightarrow x + 1$ ), e  $\sigma$  ( $x \rightarrow -x$ ). La seconda è l'azione sull'insieme  $S_{12}$  delle serie generata dalle trasformazioni  $p$  e  $r$ . Queste azioni commutano con l'associazione  $s \rightarrow P_s$ , ossia*

$$P_{r \cdot s} = \sigma \cdot P_s, \quad P_{p \cdot s} = \rho \cdot P_s.$$

In altre parole, identificando  $\rho$  con  $p$  e  $\sigma$  con  $R$ , per ogni  $d \in \mathbb{D}_{12}$  il diagramma sottostante commuta

$$\begin{array}{ccc} S_{12} & \xrightarrow{d} & S_{12} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{d} & \mathcal{P} \end{array} \quad (2.2)$$

dove le frecce verticali indicano l'applicazione  $s \rightarrow P_s$

**Proposizione 2.14.** *Data una serie  $s$  con diagramma di Gauss associato  $D_s$ , gli elementi dell'orbita di  $s$  per l'azione di  $\Gamma$  sono tutte e sole le serie con diagramma associato  $D_s$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che le serie  $s$  e  $t$  abbiano lo stesso diagramma associato e mostriamo che  $t$  appartiene all'orbita di  $s$ . Grazie alla proposizione precedente, a meno di applicare a  $s$  un qualche elemento  $d$  del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$ , si possono portare e coincidere le partizioni, cioè  $P_t = P_{d \cdot s}$ . Allora per il lemma 2.12 esiste  $g \in G$  tale che  $(g \cdot d) \cdot s = t$ .  $\square$

## 2.3 Numero di serie associate a un diagramma di Gauss

Poichè il gruppo  $\Gamma$  è finito, indicando con  $O_s$  l'orbita della serie  $s$  per l'azione di  $\Gamma$ , e con  $Stab(s)$  lo stabilizzatore di  $s$ , vale la seguente relazione:

$$|O_s| = \frac{|\Gamma|}{|Stab(s)|}. \quad (2.3)$$

Rimane quindi da stabilire, dato un qualsiasi diagramma di Gauss e una serie  $s$  ad esso associata, la relazione tra il diagramma stesso e lo stabilizzatore di  $s$ .

**Definizione 2.15.** *Data una serie  $s \in S_{12}$  si definisce gruppo di simmetria della serie  $s$ , e si scrive  $\text{Simm}(s)$ , il sottogruppo del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_{12}$  definito da*

$$d \in \text{Simm}(s) \Leftrightarrow P_s = P_{d \cdot s}.$$

**Lemma 2.16.** *Data una serie  $s$  con diagramma associato  $D_s$  e un  $d \in \mathbb{D}_{12}$ , condizione necessaria e sufficiente affinché esista  $g \in G$  tale che  $d \cdot s = g \cdot s$  è che  $d$  giaccia nel gruppo  $\text{Simm}(s)$ .*

*Dimostrazione.* Data una serie  $s$ , per 2.12 gli elementi  $g \in G$  sono tutti e soli quelli che verificano  $P_s = P_{g \cdot s}$ . Per questo motivo

$$P_s = P_{d \cdot s} \Leftrightarrow \exists g \in G : d \cdot s = g \cdot s.$$

□

Se due serie  $s$  e  $r$  hanno lo stesso diagramma associato  $D_s = D_r$ , significa che esiste un  $d \in \mathbb{D}_{12}$  tale che  $P_r = P_{d \cdot s}$ . In virtù di questo fatto i gruppi  $\text{Simm}(s)$  e  $\text{Simm}(r)$  sono coniugati tramite  $d$  e, in particolare, isomorfi. Si può quindi parlare senza ambiguità del *gruppo di simmetria* del diagramma  $D_s$ , e indicarlo con  $\text{Simm}(D_s)$ .

**Osservazione 2.17.** *Poichè l'azione di  $G$  su  $S_{12}$  è libera, per ogni  $d \in \mathbb{D}_{12}$  e  $s \in S_{12}$  esiste al più un  $g \in G$  tale che  $d \cdot g \cdot s = s$ , e questo accade se e solo se  $h \cdot s = d^{-1} \cdot s$ . Per questo motivo, e per 2.16, si ha*

$$|\text{Stab}(s)| = |\text{Simm}(s)| = |\text{Simm}(D_s)|$$

dove  $D_s$  è il diagramma di Gauss associato alla serie  $s$ .

A questo punto è sufficiente notare che

$$|\Gamma| = 24 \cdot |G|.$$

Inoltre

$$E \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6, \quad F \cong S_6$$

quindi per 2.11

$$|G| = |E| \cdot |F| = 2^6 \cdot 6!.$$

Pertanto, indicando con  $|D|$  il numero di serie associate al diagramma di Gauss  $D$ , per 2.3 e 2.17 si ottiene:

$$|D| = \frac{24 \cdot 2^6 \cdot 6!}{|\text{Simm}(D)|}. \quad (2.4)$$





## Capitolo 3

# Diagrammi di Gauss generalizzati

La costruzione introdotta nel capitolo precedente può essere facilmente generalizzata in modo da costruire un'intera famiglia di diagrammi. Più in dettaglio, la costruzione del diagramma di Gauss associato a una serie prevede di collegare con segmenti note separate da un intervallo di sei semitoni. Questa condizione si può esprimere algebricamente nel modo seguente: se  $a_i$  e  $a_j$  sono note di una serie  $s$ , queste sono separate da un intervallo di tritono se e solo se  $a_i - a_j = 6 \pmod{12}$  o, equivalentemente,  $a_i$  e  $a_j$  appartengono alla stessa classe laterale per il sottogruppo  $H = \langle 6 \rangle$  degli interi modulo 12 isomorfo a  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Si può però pensare di associare note appartenenti alla stessa classe laterale per un generico sottogruppo  $H$ . Questa generalizzazione ha un vantaggio: permette di studiare non solo le serie dodecafoniche, ma serie di lunghezza generica  $n$  (ottenute dividendo l'ottava in  $n$  intervalli uguali). Quello che si ottiene procedendo in questo modo, fissato un intero  $n$  e un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , è un diagramma di Gauss generalizzato di ordine  $n$ , con  $H$  come gruppo caratteristico. Parallelamente si otterranno diverse relazioni di equivalenza sull'insieme delle serie, e quindi diverse classificazioni. Questo capitolo è dedicato alla formalizzazione di questa costruzione, e alla dimostrazione delle generalizzazioni dei risultati del capitolo precedente.

### 3.1 Definizioni

Fissiamo un intero  $n$  e un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  di ordine  $m$  e indice  $d$ . L'insieme delle serie di lunghezza  $n$  verrà indicato con  $S_n$ .

Sia  $\mathcal{P}^H$  l'insieme delle partizioni di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in  $d$  insiemi di  $m$  elementi. Come in precedenza, su  $\mathcal{P}^H$  si ha l'azione del gruppo di simmetria dell' $n$ -agone regolare  $\mathbb{D}_n$ .

**Definizione 3.1.** Un diagramma di Gauss generalizzato di ordine  $n$  con  $H$  come sottogruppo caratteristico è un elemento dell'insieme quoziente

$$\mathcal{P}^H/\mathbb{D}_n.$$

Data una serie  $s = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ , questa induce una relazione di equivalenza  $\sim_s$  su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , dove  $i \sim_s j$  se e solo se  $a_i - a_j \in H$ .

**Definizione 3.2.** Data una serie  $s = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ , definiamo  $H$ -partizione associata a  $s$  (e indichiamo con  $P_s^H$ ) la partizione di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in  $m$  insiemi di  $d$  elementi indotta dalla relazione di equivalenza  $\sim_s$ .

**Definizione 3.3.** Data una serie  $s \in S_n$ , definiamo diagramma di Gauss generalizzato associato a  $s$  con  $H$  come sottogruppo caratteristico (e indichiamo con  $D_s^H$ ) la classe di equivalenza di  $P_s^H$  in  $\mathcal{P}^H/\mathbb{D}_n$ .

Vogliamo ora estendere la nozione di serie derivate al caso di serie di lunghezza arbitraria  $n$ . Definiamo i seguenti operatori:

1. La trasposizione  $T$ :  $T \cdot s = (a_0 + 1, a_1 + 1, \dots, a_{n-1} + 1)$ .  $T$  ha periodo  $n$  e, nella rappresentazione di  $s$  come una permutazione, agisce *a sinistra* tramite composizione con il ciclo  $(0, 1, \dots, n - 1)$ , ossia

$$T \cdot s(i) = s(i) + 1.$$

2. L'inversione  $I$ :  $I \cdot s = (-a_0, -a_1, \dots, -a_{n-1})$ .  $I$  ha periodo 2 e, come sopra, nella rappresentazione di  $s$  come una permutazione la sua azione equivale alla composizione *a sinistra* con il prodotto di trasposizioni della forma  $(i, n-i)$  per  $1 \leq i \leq n-2/2$  se  $n$  è pari, e per  $1 \leq i \leq n-1/2$  se  $n$  è dispari, ossia

$$I \cdot s(i) = -s(i).$$

3. La retrogradazione  $R$ :  $R \cdot s = (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$ , che consiste nell'eseguire la serie al contrario, dall'ultima nota alla prima.  $R$  ha periodo due, ma in questo caso rappresentando le serie come una permutazioni, si ha un'azione *a destra* rappresentata dalla composizione per il prodotto di trasposizioni della forma  $(i, n - 1 - i)$

$$R \cdot s(i) = s(n - 1 - i).$$

Si consideri il gruppo di trasformazioni generato da questi operatori. Esso risulta isomorfo al prodotto diretto  $\mathbb{D}_n \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , dove il fattore  $\mathbb{D}_n = \langle T, I \rangle$  agisce a sinistra su  $S_n$ , mentre il secondo fattore  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle R \rangle$  agisce a destra. La dimostrazione è identica al caso  $n = 12$ ,  $H = \langle 6 \rangle$  già trattato in 1.1.

**Proposizione 3.4.** *Come in precedenza, due serie derivate una rispetto all'altra hanno lo stesso diagramma di Gauss generalizzato, qualunque sia il sottogruppo caratteristico.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo fatto è la generalizzazione del procedimento seguito nel caso  $n = 12$ ,  $H = \langle 6 \rangle$  (proposizione 2.5). Per quanto riguarda gli operatori  $T$  e  $I$  basta notare che, per ogni serie  $s$ , vale

$$P_s = P_{T \cdot s} = P_{I \cdot s}.$$

Infatti, se  $x - y \in H$ ,

$$T(x) - T(y) = (x + 1) - (y + 1) = x - y \in H.$$

Per quanto riguarda l'inversione, nelle stesse ipotesi  $I(x) - I(y) = y - x \in H$ .

Nel caso della retrogradazione  $P_{R \cdot s} = d \cdot P_s$ , con  $d = T \cdot I$ , ossia le due partizioni si ottengono l'una dall'altra tramite riflessione lungo la bisettrice tra le posizioni della prima e dell'ultima nota.  $\square$

## 3.2 I gruppi $E_H$ e $F_H$

Come nel capitolo precedente, vogliamo definire un'azione di gruppo sull'insieme  $S_n$  delle serie che ci permetta di studiare la classificazione ottenuta con i diagrammi di Gauss generalizzati. Supponiamo quindi di avere fissato il sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Definizione 3.5.** *Sia  $E_H$  il sottogruppo del gruppo di permutazioni  $S_n$  che fissa le classi laterali per  $H$ , ossia tale che per ogni  $\sigma \in E_H$ ,  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$   $\sigma(x) \in x + H$ . Questo gruppo agisce sull'insieme delle serie nel modo seguente:  $\sigma \in E_H$ ,  $s = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$*

$$\sigma \cdot s = (\sigma(a_0), \sigma(a_1), \dots, \sigma(a_{n-1})).$$

**Proposizione 3.6.**  *$E_H \cong (S_m)^d$ , dove  $d$  e  $m$  sono rispettivamente l'indice e l'ordine di  $H$ . Inoltre per ogni serie  $s$  e  $\sigma \in E_H$  vale  $P_s^H = P_{\sigma \cdot s}^H$ .*

*Dimostrazione.*  $E_H$  agisce su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  permutando in maniera indipendente gli  $m$  elementi di ciascuna delle  $d$  classi laterali, ed è pertanto isomorfo alla somma diretta di  $d$  copie del gruppo  $S_m$ .

Inoltre, data una serie  $s$  ed elementi  $x_1, \dots, x_m$  appartenenti a  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$$\{x_1, \dots, x_m\} \in P_s^H \Leftrightarrow \forall i, j \ s(x_i) - s(x_j) \in H.$$

Scelto quindi  $\sigma \in E_H$ ,

$$\sigma \cdot s(x_i) - \sigma \cdot s(x_j) = s(x_i) + h_1 - (s(x_j) + h_2) \in H$$

per opportuni  $h_1, h_2 \in H$ , per cui  $\{x_1, \dots, x_m\} \in P_{\sigma \cdot s}^H$ , da cui segue la tesi.  $\square$

Fissiamo ora un insieme di rappresentanti  $\mathcal{R}$  per il quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ . In analogia con quanto fatto nel capitolo precedente definiamo le permutazioni  $\gamma_{ij}$  per  $i, j \in \mathcal{R}^H$  come la composizione delle trasposizioni  $(i+h, j+h)$  per  $h \in H$ . Più precisamente, indicando con  $[x]$  la classe laterale di un elemento  $x$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , per  $i \neq j \in \mathcal{R}$  vale:

1. Se  $[x] \neq [i], [j]$  allora  $\gamma_{ij}(x) = x$ .
2. Se  $x = i + h$  con  $h \in H$   $\gamma_{ij}(x) = j + h$ .
3. Se  $x = j + h$  con  $h \in H$   $\gamma_{ij}(x) = i + h$ .

**Definizione 3.7.** Sia  $F_H^{\mathcal{R}}$  il sottogruppo di  $S_n$  generato dalle  $\gamma_{ij}$ . Esso agisce sull'insieme delle serie  $S_n$  nel modo seguente: se  $s = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$

$$\gamma_{ij} \cdot s = (\gamma_{ij}(a_0), \gamma_{ij}(a_1), \dots, \gamma_{ij}(a_{n-1})).$$

**Proposizione 3.8.**  $F_H^{\mathcal{R}} \cong S_d$ , dove  $d$  è l'indice di  $H$ . Inoltre,  $\forall \gamma \in F_H^{\mathcal{R}}$  vale  $P_s^H = P_{\gamma \cdot s}^H$

*Dimostrazione.*  $|\mathcal{R}| = d$  per definizione.  $F_H^{\mathcal{R}}$  agisce sull'insieme  $\mathcal{R}$  nel modo seguente:  $\gamma_{ij}$  permuta tra loro gli elementi  $i, j \in \mathcal{R}$  e lascia fissi gli altri. In virtù di questo fatto si ha un isomorfismo  $\xi$  tra  $F_H^{\mathcal{R}}$  e il gruppo di permutazioni di  $\mathcal{R}$  (che è isomorfo a  $S_d$ ) ottenuto associando al generatore  $\gamma_{ij}$  di  $F_H^{\mathcal{R}}$  la trasposizione  $(i, j)$ . Poichè le trasposizioni  $(i, j)$  di  $\mathcal{R}$  generano il gruppo di permutazioni di  $\mathcal{R}$  e appartengono all'immagine di  $\xi$ ,  $\xi$  stesso risulta surgettivo.

Inoltre, scelto  $\gamma \in F_H$ , se  $\gamma$  fissa una classe laterale per  $H$  allora agisce su di essa come l'identità. Da ciò segue che

$$\xi(\gamma) = 1 \Leftrightarrow \gamma = 1$$

pertanto  $\xi$  è iniettiva, e quindi un isomorfismo.

Per concludere, è sufficiente osservare che i generatori  $\gamma_{ij}$  di  $F_H^{\mathcal{R}}$  verificano  $P_s^H = P_{\gamma_{ij} \cdot s}^H$ .  $\square$

**Osservazione 3.9.** L'azione di  $F_H^{\mathcal{R}}$  sull'insieme delle serie  $S_n$  dipende dalla scelta dell'insieme  $\mathcal{R}$ . Più precisamente, se  $\mathcal{R}'$  è un'altro insieme di rappresentanti, e  $i', j' \in \mathcal{R}'$  con  $i' \in [i]$  e  $j' \in [j]$ , allora

$$\gamma_{i'j'} \circ \gamma_{ij}^{-1}(x + H) = \gamma_{i'j'}(\gamma_{ij}^{-1}(x) + H) = x + H$$

pertanto

$$\gamma_{i'j'} \circ \gamma_{ij}^{-1} \in E_H.$$

Sia  $G_H$  il gruppo generato dai gruppi  $E_H$  e  $F_H^{\mathcal{R}}$ . In virtù della precedente osservazione,  $G_H$  non dipende dalla scelta di  $\mathcal{R}$  poichè contiene  $\gamma_{i',j'} \in F_H^{\mathcal{R}'}$  per ogni scelta di rappresentanti  $\mathcal{R}'$ . Per come sono definite le azioni dei gruppi  $E_H$  e  $F_H^{\mathcal{R}}$ , si ha un'azione a sinistra del gruppo  $G_H$  su  $S_n$ .

**Osservazione 3.10.**  $G_H$  è isomorfo al prodotto semidiretto  $E_H \rtimes F_H^{\mathcal{R}}$  per ogni scelta dell'insieme  $\mathcal{R}$ .

*Dimostrazione.*  $E_H$  è un sottogruppo normale di  $G_H$ . Basta verificare che sia invariante per coniugio tramite elementi di  $F_H^{\mathcal{R}}$ . Sia  $\sigma \in E_H$ , allora per ogni  $x$  vale  $\sigma(x + H) = x + H$ .

1. Se  $y \in [i]$  allora  $y = i + h$  e

$$\gamma_{ij}\sigma\gamma_{ij}^{-1}(y) = \gamma_{ij}\sigma\gamma_{ij}^{-1}(i + h) = \gamma_{ij}\sigma(j + h) = \gamma_{ij}(j + h') = i + h' \in [i]$$

con  $h' \in H$ , quindi  $\gamma_{ij}\sigma\gamma_{ij}^{-1}$  fissa tutte le classi laterali per  $H$ , e pertanto appartiene a  $E_H$ .

2. Se  $y \in [l]$  con  $l \in \mathcal{R}'$ ,  $l \neq i, j$ , allora  $y = l + h$  e

$$\gamma_{ij}\sigma\gamma_{ij}^{-1}(y) = \gamma_{ij}\sigma(y) = \gamma_{ij}(l + h') = l + h' \in [l]$$

per qualche  $h' \in H$ . Quindi  $\gamma_{ij}\sigma\gamma_{ij}^{-1} \in E_H$ .

$E_H \cap F_H^{\mathcal{R}} = \{e\}$ , poichè una permutazione in tale gruppo fissa tutte le classi laterali per  $H$  (poichè appartiene a  $E_H$ ) e una permutazione di  $F_H^{\mathcal{R}}$  con tale proprietà è necessariamente l'identità. Inoltre  $G_H$  è per definizione generato da  $E_H$  e da  $F_H^{\mathcal{R}}$ , per cui su può applicare 2.10 e ottenere la tesi.  $\square$

Sono evidenti le analogie col procedimento del capitolo precedente: l'unica aggiunta è l'indice per indicare il gruppo caratteristico:  $F_H^{\mathcal{R}}$  prende il posto di  $F$  nel permutare le classi laterali, mentre  $E_H$  sostituisce  $E$  nel permutare le note all'interno di ogni classe laterale. Come prima infatti vale il seguente:

**Lemma 3.11.** Per ogni coppia di serie  $s$  e  $t$ ,

$$P_s^H = P_t^H \Leftrightarrow \exists g \in G_H : g \cdot s = t.$$

*Dimostrazione.* Applichiamo a  $s$  un qualche elemento  $\gamma$  di  $F_H^{\mathcal{R}}$ , permutando la posizione di ciascuna classe laterale fino a farla coincidere con quella di  $t$ . Secondariamente applichiamo un elemento di  $E_H$  permutando le note di ciascuna classe laterale fino a portare le due serie a coincidere.  $\square$

Come nel caso  $n = 12$   $H = \langle 6 \rangle$ , i diagrammi di Gauss sono definiti come quoziente dell'insieme delle partizioni  $\mathcal{P}^H$  per l'azione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$ . Vogliamo ottenere la medesima azione sull'insieme  $S_n$  delle serie. Definiamo i seguenti operatori:

1.  $p$ , che agisce come una permutazione ciclica nella posizione delle note.  
Se  $s = (a_0, \dots, a_{n-1})$

$$p \cdot s = (a_{n-1}, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}).$$

2.  $r$ , che agisce come una retrogradazione:

$$r \cdot s = (a_{n-1}, a_{n-2} \dots, a_1, a_0).$$

Il gruppo di trasformazioni generato da  $p$  ed  $r$  agisce su  $S_n$  a destra, e risulta isomorfo al gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$ . Vale l'analogo della proposizione 2.13.

**Proposizione 3.12.** *Sono definite due azioni del gruppo diedrale: la prima è sull'insieme  $\mathcal{P}^H$  delle partizioni, ed è indotta dalla naturale azione su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  generata da  $\rho$  ( $x \rightarrow x+1$ ), e  $\sigma$  ( $x \rightarrow -x$ ). La seconda è l'azione sull'insieme  $S_n$  delle serie, generata dalle trasformazioni  $p$  e  $r$ . Queste azioni commutano con l'associazione  $s \rightarrow P_s$ , ossia*

$$P_{r \cdot s} = \sigma \cdot P_s \quad P_{p \cdot s} = \rho \cdot P_s$$

**Proposizione 3.13.** *Le azioni del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n = \langle p, r \rangle$  e del gruppo  $G_H$  su  $S_n$  commutano, per cui è possibile definire un'azione del gruppo*

$$\Gamma_H \cong G_H \times \mathbb{D}_n$$

*sull'insieme  $S_n$  delle serie.*

La dimostrazione della precedente proposizione è identica a quella del lemma 2.8 nel caso  $n = 12$ ,  $H = \langle 6 \rangle$ .

**Proposizione 3.14.** *Data una serie  $s$  con diagramma di Gauss generalizzato associato  $D_s^H$ , gli elementi dell'orbita di  $s$  per l'azione di  $\Gamma_H$  sono tutte e sole le serie con diagramma associato  $D_s^H$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che le serie  $s$  e  $t$  abbiano lo stesso diagramma associato e mostriamo che  $t$  appartiene all'orbita di  $s$ . A meno di applicare a  $s$  un qualche elemento  $d$  del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n = \langle p, r \rangle$ , si possono portare a coincidere le partizioni, cioè  $P_t^H = P_{d \cdot s}^H$ . Allora per l'osservazione precedente esiste  $g \in G_H$  tale che  $(g \cdot d) \cdot s = t$ . □

### 3.3 Numero di serie associate

In analogia con quanto fatto precedentemente, mostriamo come calcolare il numero di serie associate a un dato diagramma di Gauss generalizzato.

Usiamo nuovamente la relazione

$$|O_s| = \frac{|\Gamma_H|}{|Stab(s)|}. \tag{3.1}$$

**Definizione 3.15.** Data una serie  $s \in S_n$  si definisce gruppo di simmetria della serie  $s$ , e si scrive  $\text{Simm}_H(s)$ , il sottogruppo del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$  definito da

$$d \in \text{Simm}_H(s) \Leftrightarrow P_s^H = P_{d \cdot s}^H.$$

**Lemma 3.16.** Data una serie  $s$  con diagramma associato  $D_s^H$  e un  $d \in \mathbb{D}_n$ , condizione necessaria e sufficiente affinché esista  $g \in G_H$  tale che  $d \cdot s = g \cdot s$  è che  $d$  giaccia nel gruppo  $\text{Simm}^H(s)$ .

*Dimostrazione.* Data una serie  $s$ , per 3.11 gli elementi  $g \in G_H$  sono tutti e soli quelli che verificano  $P_s^H = P_{g \cdot s}^H$ . Per questo motivo

$$P_s^H = P_{d \cdot s}^H \Leftrightarrow \exists g \in G_H : d \cdot s = g \cdot s.$$

□

Se due serie  $s$  e  $t$  hanno lo stesso diagramma associato  $D_s^H = D_t^H$ , significa che esiste un  $d \in \mathbb{D}_n$  tale che  $P_r^H = P_{d \cdot s}^H$ . In virtù di questo fatto i gruppi  $\text{Simm}_H(s)$  e  $\text{Simm}_H(t)$  sono coniugati tramite  $d$  e, in particolare, isomorfi. Si può quindi parlare senza ambiguità del gruppo di simmetria del diagramma  $D_s^H$ , e indicarlo con  $\text{Simm}(D_s^H)$ .

**Proposizione 3.17.** Poiché l'azione di  $G_H$  su  $S_n$  è libera, per ogni  $d \in \mathbb{D}_n$  e  $s \in S_n$  esiste al più un  $g \in G_H$  tale che  $d \cdot g \cdot s = s$ , e questo accade se e solo se  $g \cdot s = d^{-1} \cdot s$ . Per questo motivo, e per 3.16, si ha che

$$|\text{Stab}(s)| = |\text{Simm}_H(s)| = |\text{Simm}(D_s^H)|$$

dove  $D_s^H$  è il diagramma di Gauss generalizzato associato alla serie  $s$ .

Per concludere è sufficiente notare (indicando con  $m$  e  $d$  rispettivamente l'ordine e l'indice di  $H$ ) che

$$|\Gamma_H| = 2n \cdot |G_H|, \quad E_H \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^d, \quad F_H^{\mathcal{R}} \cong S_d$$

quindi

$$|G_H| = |E_H| \cdot |F_H^{\mathcal{R}}| = m^d \cdot d!.$$

Indicando con  $|D^H|$  il numero di serie associate al diagramma di Gauss  $D^H$ , per 3.1 e 3.17 si ottiene:

$$|D^H| = \frac{2n \cdot m^d \cdot d!}{|\text{Simm}(D^H)|}. \quad (3.2)$$





## Capitolo 4

# Potere di classificazione dei diagrammi di Gauss generalizzati

Vogliamo studiare ora un nuovo problema: supponiamo di avere fissato una serie  $s \in S_n$  e un insieme di sottogruppi  $\mathcal{S} = \{H_1, H_2, \dots, H_m\}$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Possiamo allora costruire i diagrammi di Gauss generalizzati  $D_s^{H_1}, \dots, D_s^{H_m}$ .

Vogliamo capire quali sono le serie che hanno lo stesso diagrammi di Gauss generalizzato di  $s$ , per ogni sottogruppo di  $\mathcal{S}$ . Per 3.3, sarà sufficiente studiare l'intersezione  $\Lambda_{\mathcal{S}}$  dei gruppi  $\Gamma_H \cong G_H \times \mathbb{D}_n$  per  $H \in \mathcal{S}$ . Il fattore  $\mathbb{D}_n$  è però presente in tutti questi gruppi pertanto, indicando con  $\Omega_{\mathcal{S}}$  l'intersezione dei gruppi  $G_H$  per  $H \in \mathcal{S}$ , si avrà

$$\Lambda_{\mathcal{S}} \cong \Omega_{\mathcal{S}} \times \mathbb{D}_n.$$

Il problema può anche essere visto da un altro punto di vista: ciascun gruppo  $G_H$  può essere identificato con il sottogruppo del gruppo di permutazioni  $S_n$  che rispetta la partizione di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in classi laterali per  $H$ . Si tratta quindi di capire, dato un insieme  $\mathcal{S}$  di sottogruppi, qual'è il sottogruppo del gruppo di permutazioni che rispetta la relazione di equivalenza  $\sim$  su  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  definita da

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \bigcap_{H \in \mathcal{S}} H$$

Possiamo già individuare un sottogruppo di  $\Omega_{\mathcal{S}}$ .

**Definizione 4.1.** *Definiamo gruppo delle trasformazioni affini di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , e indichiamo con  $Aff(n)$  l'insieme delle applicazioni  $\phi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  definite da*

$$\phi(x) = a \cdot x + b$$

dove  $a$  e  $b$  sono rispettivamente un invertibile e un elemento generico di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , con l'operazione di composizione.

**Proposizione 4.2.** Sia  $M \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  il sottogruppo di  $Aff(n)$  dato dalle trasformazioni del tipo  $x \rightarrow a \cdot x$ , e  $T \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  il sottogruppo delle trasformazioni del tipo  $x \rightarrow x + b$ . Allora

$$Aff(n) \cong T \rtimes M.$$

*Dimostrazione.*  $M$  e  $T$  generano  $Aff(n)$  e hanno intersezione nulla. Inoltre  $T$  è invariante per il coniugio tramite elementi di  $M$ . Infatti se  $t \in T$ ,  $t(x) = x + b$  e  $m \in M$ ,  $m(x) = a \cdot x$  vale

$$mtm^{-1}(x) = mt(a^{-1} \cdot x) = m(a^{-1} \cdot x + b) = a \cdot (a^{-1} \cdot x + b) = x + a \cdot b$$

per cui  $mtm^{-1} \in T$ . □

**Proposizione 4.3.**  $Aff(n) < \Omega_S$ .

*Dimostrazione.* Sia  $H$  un sottogruppo di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Sia  $\sigma \in Aff(n)$ , con  $\sigma(x) = a \cdot x + b$ . Allora, se  $x - y \in H$

$$\sigma(x) - \sigma(y) = a \cdot (x - y) = \underbrace{(x - y) + \dots + (x - y)}_{a \text{ volte}} \in H.$$

□

**Proposizione 4.4.** Per ogni coppia di sottogruppi  $H, K$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  vale

$$E_H \cap E_K = E_{H \cap K}.$$

*Dimostrazione.* Notiamo che vale  $(x + H) \cap (x + K) = x + (H \cap K)$ . Pertanto

$$\sigma(x + (H \cap K)) = \sigma((x + H) \cap (x + K)) = \sigma(x + H) \cap \sigma(x + K)$$

e

$$\sigma \in E_H \cap E_K \Leftrightarrow \sigma(x + (H \cap K)) = (x + H) \cap (x + K) = x + (H \cap K).$$

□

**Osservazione 4.5.** L'osservazione precedente implica in particolare che, se  $H < K$ ,  $E_H < E_K$ , ma in generale  $E_H$  non sarà un sottogruppo normale di  $E_K$ .

## 4.1 Scelta dei rappresentanti

Sia  $\mathcal{S} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$  un insieme di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , e  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  indichi il gruppo  $\Sigma_{i=1}^n H_i$ . Con un abuso di notazione, indichiamo con  $F_{\mathcal{S}}$  il gruppo  $F_{\Sigma_{\mathcal{S}}}$ .

Questo paragrafo è dedicato essenzialmente alla dimostrazione del seguente teorema:

**Teorema 4.6.** *Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme (finito) dei sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Si possono scegliere rappresentanti per ogni quoziente del tipo  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\Sigma_{\mathcal{S}'}$ , dove  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ , in modo che  $\forall \mathcal{S}', \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$  valga*

$$F_{\mathcal{S}'} \cap F_{\mathcal{S}''} = F_{\mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''} \quad (4.1)$$

(dove si sottintende che i gruppi del tipo  $F_{\mathcal{S}}$  sono definiti a partire dall'insieme di rappresentanti scelto).

Iniziamo con il caso particolare  $\mathcal{S} = \{H, K\}$ , con  $H < K < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Proposizione 4.7.** *Dati gruppi  $H < K < \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , è possibile scegliere insiemi di rappresentanti  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}'$ , rispettivamente per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/K$  e  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ , in modo che valga*

$$F_K^{\mathcal{R}} < F_H^{\mathcal{R}'}$$

*Dimostrazione.* Scelto l'insieme di rappresentanti  $\mathcal{R}$ , si definisca  $\mathcal{R}' = \{r + a \mid r \in \mathcal{R}, a \in \mathcal{A}\}$ , dove  $\mathcal{A} \subset K$  è un insieme di rappresentanti per il quoziente  $K/H$ . Con tale definizione,  $\mathcal{R}'$  è effettivamente un insieme di rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ .

Siano infatti  $x, y \in \mathcal{R}'$  della forma  $x = r + a$  e  $y = t + b$  con  $r, t \in \mathcal{R}$  e  $a, b \in \mathcal{A}$ . Allora  $x - y = (r - t) + (a - b)$ . Se  $x \in H$ , segue  $x - y \in K$  poichè  $H < K$ , il che implica  $r = t$  poichè  $\mathcal{R}$  è un insieme di rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/K$ . Ma in tal caso  $a - b \in H$ , e quindi  $a = b$  poichè  $\mathcal{A}$  è un insieme di rappresentanti di  $K/H$ . Pertanto diversi elementi di  $\mathcal{R}'$  appartengono a classi laterali diverse per  $H$ .

Sia ora  $x$  un elemento di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Poichè  $\mathcal{R}$  è un insieme di rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/K$ , si può scrivere  $x = r + k$  per qualche  $r \in \mathcal{R}$  e  $h \in H$ . Si noti poi che vale  $k = a + h$  per qualche  $a \in \mathcal{A}$  e  $h \in H$ . Quindi  $x = r + a + h$ , ossia appartiene alla classe laterale per  $H$  di un elemento di  $\mathcal{R}'$  ( $r + a$ ).

Sia  $\gamma_{ij}$  per  $i, j \in \mathcal{R}$  la permutazione definita dalla composizione delle permutazioni  $(i + k, j + k)$  per  $k \in K$ . Le  $\gamma_{ij}$  generano  $F_K^{\mathcal{R}}$ . Si definisca similmente  $\gamma_{i',j'}$  per  $i', j' \in \mathcal{R}' = \mathcal{R} + \mathcal{A}$  come composizione delle trasposizioni  $(i' + h, j' + h)$  per  $h \in H$ . Anche in questo caso si ottiene un insieme di generatori per il gruppo  $F_H^{\mathcal{R}'}$ .

Si può verificare che i generatori  $\gamma_{ij}$  di  $F_K^{\mathcal{R}}$  sono ottenibili come composizione per  $a \in \mathcal{A}$  delle permutazioni del tipo  $\gamma_{i+a, j+a} \in F_H^{\mathcal{R}'}$ . Infatti un generico  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si scriverà in modo unico come  $x = i + a + h$  con  $i \in \mathcal{R}$ ,

$a \in \mathcal{A} \subset K$  e  $h \in H$ . Vale  $\gamma_{ij}(x) = j + a + h$ , poichè  $a + h \in K$ . Preso un generatore  $\gamma_{i+a, j+a} \in F_H^{\mathcal{R}'}$ , per definizione varrà

$$\gamma_{i+a, j+a}(x) = \gamma_{i+a, j+a}(i + a + h) = j + a + h = \gamma_{ij}(x).$$

Dal momento che i generatori di  $F_K^{\mathcal{R}}$  si ottengono come composizione dei generatori di  $F_H^{\mathcal{R}'}$ , si ha la tesi. □

Pertanto, a meno di scegliere opportunamente i rappresentanti, tra i gruppi del tipo  $F_H$  si ottengono delle inclusioni *controvarianti* rispetto alle inclusioni dei relativi sottogruppi caratteristici. Si noti inoltre che si può estendere per induzione il risultato della proposizione 4.7 al caso  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m\}$  con  $H_i < H_{i+1} \forall i = 1, \dots, m-1$ . Questo procedimento inoltre, produce una scelta di rappresentanti che verifica i requisiti del teorema 4.6.

Vorremmo applicare il procedimento di scelta dei rappresentanti appena descritto al caso generale  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m\}$ , ma sorge un problema: il fatto che ci sono diversi cammini di inclusioni tra sottogruppi del tipo  $\Sigma_{\mathcal{S}'}$  per  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  ai quali applicare il risultato della proposizione 4.7, e bisogna quindi avere cura di scegliere i rappresentanti in modo da poter definire in modo univoco il gruppi del tipo  $F_{H_i}$ .

Per dimostrare il teorema 4.6 nel caso generale abbiamo pertanto bisogno di un ulteriore risultato:

**Lemma 4.8.** *Sia  $\mathcal{S}$  un insieme di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Si possono scegliere rappresentanti per ogni quoziente del tipo*

$$(\Sigma_{\mathcal{S}'} + H)/\Sigma_{\mathcal{S}'}$$

con  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  e  $H \in \mathcal{S}$ . e definire per somma progressiva, come nella dimostrazione di 4.7 i rappresentanti per i quozienti della forma  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\Sigma_{\mathcal{S}'}$  in modo da soddisfare le seguenti condizioni:

1. I rappresentanti di  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\Sigma_{\mathcal{S}'}$  sono univocamente determinati.

2.  $\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}$  valga

$$F_{\mathcal{S}''} < F_{\mathcal{S}'}$$

(dove si sottintende che i gruppi del tipo  $F_{\mathcal{S}}$  sono definiti a partire dall'insieme di rappresentanti scelto).

3. Per ogni coppia di sottogruppi  $H, K$  della forma  $\Sigma_{\mathcal{S}'}$  con  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ , i rappresentanti di  $(H + K)/H$  giacciono in  $K$ .

Prima di dedicarci alla dimostrazione di questo lemma, mostriamo che una scelta di rappresentanti con le proprietà sopraelencate verifica necessariamente l'equazione 4.1 del teorema 4.6.

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che, per sottogruppi  $H$  e  $K$  vale  $F_{H+K} = F_H \cap F_K$ . Siano  $\mathcal{K}$  un insieme di rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H+K)$ ,  $\mathcal{A} \subset K$  per  $(H+K)/H$ , e  $\mathcal{B} \subset H$  per  $(H+K)/K$  in virtù di 4.8. Un generico  $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  si scriverà come  $x = y + h + k$ , con  $y \in \mathcal{K}$ ,  $h \in H$  e  $k \in K$ . Allora  $h = b + t$  con  $b \in \mathcal{B}$  e  $t \in K \cap H$  e  $k = a + s$  con  $a \in \mathcal{A}$  e  $s \in K \cap H$ . Quindi  $x = y + a + b + r$  con  $r = t + s$ .

Sia ora  $\gamma \in F_H \cap F_K$ .  $\gamma(x) = y' + a' + b + r$  con  $y' \in \mathcal{K}$  e  $a' \in \mathcal{A}$  poichè  $\gamma \in F_H$ . Allo stesso modo  $\gamma(x) = y'' + a + b' + r$  con  $b' \in \mathcal{B}$ . Certamente  $y'' = y'$ , poichè la scrittura di  $\gamma(x)$  come somma di un elemento di  $\mathcal{K}$  con uno di  $H+K$  è unica. Quindi  $a - a' = b' - b \in H \cap K$ . Ma diversi elementi di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  devono giacere in classi diverse per  $H \cap K$ , quindi  $a - a' = b - b' = 0$ . Allora  $\gamma(x) = y' + a + b + r$ , il che significa  $\gamma \in F_{H+K}$ .

L'altra inclusione è garantita dal fatto che valgono le inclusioni controvarianti  $F_{H+K} \subset F_H$  e  $F_{H+K} \subset F_K$ .  $\square$

Come primo passo, mostriamo come ottenere una scelta di rappresentanti con le proprietà richieste nell'enunciato del lemma 4.8 nel caso di tre sottogruppi  $H, K, I$ . La dimostrazione del caso generale si ottiene per induzione sul numero di sottogruppi, ma questo caso particolare dà l'idea di come si svolge il passo induttivo (che sarà esposto in dettaglio più avanti).

Come già detto, vogliamo definire univocamente per somma progressiva rappresentanti per i quozienti  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/K$ ,  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/I$ , in modo che valgano le inclusioni controvarianti del diagramma sottostante.

$$\begin{array}{ccccc}
 & F_H & & F_K & & F_I \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & F_{H+K} & & F_{H+I} & & F_{K+I} \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & & F_{H+K+I} & & & 
 \end{array}
 \tag{4.2}$$

Dimostriamo innanzitutto alcuni risultati preliminari:

**Lemma 4.9.** *Siano  $H, K$  sottogruppi di un gruppo ciclico finito. Allora un insieme  $\mathcal{A}$  di rappresentanti per  $(H+K)/H$  è dato da un insieme di rappresentanti per  $K/(H \cap K)$ .*

*Dimostrazione.* Si può certamente scegliere un insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  in  $K$ . Inoltre gli elementi di un tale  $\mathcal{A}$  dovranno necessariamente appartenere a diverse classi laterali per  $H$  (per definizione) e quindi per  $H \cap K$ .

Inoltre, scelto  $k \in K$ , dev'essere  $k - a \in H$  per qualche  $a \in \mathcal{A}$ . Ma  $k - a \in K$  poichè  $k \in K$  e  $a \in K$ . Di conseguenza  $k - a \in K \cap H$ , quindi  $\mathcal{A}$  è un insieme di rappresentanti per  $K/(H \cap K)$ .  $\square$

**Lemma 4.10.** *Siano  $H, K, I$  sottogruppi di un gruppo ciclico finito. Allora un insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  di  $(H + K)/((H + I) \cap (H + K))$  è dato da un insieme di rappresentanti di  $K/(K \cap (H + I))$ .*

*Dimostrazione.* Si può certamente scegliere un insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  in  $K$ . Gli elementi di un tale  $\mathcal{A}$  apparterranno (per definizione) a classi diverse per  $K \cap (H + I)$ .

Scelto  $k \in K$ , si ha necessariamente  $k - a = x \in (H + K) \cap (H + I)$  per qualche  $a \in \mathcal{A}$ . Ma, poichè  $k, a \in K$ ,  $x \in K$  quindi  $x \in K \cap (H + I)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Lemma 4.11.** *Siano  $H, K, I$  sottogruppi di un gruppo ciclico finito. Allora  $(H + K) \cap (H + I) = H + (K \cap I)$ .*

*Dimostrazione.* Basta dimostrare che i due gruppi hanno lo stesso ordine. Questo discende dal fatto che, per sottogruppi  $H, K$  di un gruppo ciclico, vale  $|H + K| = \text{mcm}(|H|, |K|)$  e  $|H \cap K| = \text{MCD}(|H|, |K|)$ . Siano quindi  $e_H, e_K, e_I$  gli esponenti associato a un primo  $p$  nella fattorizzazione degli ordini rispettivamente di  $H, K$  e  $I$ . Siano invece  $g$  e  $h$  gli esponenti associati allo stesso primo nella fattorizzazione rispettivamente di  $|(H + K) \cap (H + I)|$  e di  $|H + (K \cap I)|$ . Allora vale:

$$g = \min(\max(e_H, e_K), \max(e_H, e_I)), \quad h = \max(e_H, \min(e_K, e_I)).$$

I casi possibili, a meno di scambiare  $K$  e  $I$ , sono i seguenti:

1.  $e_H \leq e_K \leq e_I, g = h = \min(e_K, e_I)$ .
2.  $e_K \leq e_H \leq e_I, g = h = e_H$ .
3.  $e_K \leq e_I \leq e_H, g = h = e_H$ .

$\square$

**Lemma 4.12.** *Siano  $H, K, I$  sottogruppi di un gruppo ciclico finito. Allora in insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  per  $((H + K) \cap (H + I))/H$  è dato da un insieme di rappresentanti di*

$$(K \cap I)/(K \cap H \cap I).$$

*Dimostrazione.* Per 4.11, basta trovare rappresentanti per  $(H + (K \cap I))/H$ , e per 4.9 si può scegliere un insieme di rappresentanti di

$$(K \cap I)/(K \cap H \cap I).$$

$\square$

**Lemma 4.13.** *Dati  $H, K, I$  sottogruppi di un gruppo ciclico un insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  per  $(H + K)/H + (K \cap I)$  è dato da un insieme di rappresentanti di  $K/(K \cap (H + I))$ .*

*Dimostrazione.*  $\mathcal{A}$  può essere certamente scelto in  $K$ . Due elementi di tale insieme apparterranno per definizione a classi diverse per

$$K \cap (H + K) \cap (H + I) = K \cap (H + I)$$

(per 4.11).

Infine, scelto  $k \in K$ , esiste  $a \in \mathcal{A}$  tale che  $k - a \in H + (K \cap I)$ . Ma  $k - a \in K$ , per cui  $k - a \in K \cap (H + I)$ , da cui la tesi. □

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_H & & \\
 & & \uparrow c & & \\
 & & F_{(H+K) \cap (H+I)} & & \\
 & \nearrow \mathcal{B} & & \nwarrow \mathcal{A} & \\
 F_{H+K} & & & & F_{H+I} \\
 & \nwarrow \mathcal{A} & & \nearrow \mathcal{B} & \\
 & & F_{H+K+I} & & \\
 & & \uparrow \kappa & & \\
 & & \{e\} & & 
 \end{array} \tag{4.3}$$

Torniamo alla dimostrazione del lemma 4.8 nel caso di tre sottogruppi. Si osservi il diagramma 4.3. Come al solito, definiamo i rappresentanti per ogni quoziente come somma dei rappresentanti di ogni estensione intermedia. Procediamo nel modo seguente:

1. Scegliamo liberamente un insieme di rappresentanti  $\mathcal{K}$  per il quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H + K + I)$ .
2. Sfruttando il lemma 4.9, scegliamo come insieme di rappresentanti per  $(H + K + I)/(H + K)$  un insieme di rappresentanti  $\mathcal{A}$  di  $I/(I \cap (H + K))$ , e definiamo rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H + K)$  come somma di elementi di  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{A}$  (con un piccolo abuso di notazione, lo indichiamo con  $\mathcal{K} + \mathcal{A}$ ).
3. Procedendo similmente al punto precedente, scegliamo come insieme di rappresentanti per  $(H + K + I)/(H + I)$  un insieme di rappresentanti  $\mathcal{B}$  di  $K/(K \cap (H + I))$ , e prendiamo come rappresentanti di  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H + I)$  l'insieme  $\mathcal{K} + \mathcal{B}$ .

4. Sfruttando il lemma 4.10, scegliamo come insieme di rappresentanti per  $(H + K)/((H + K) \cap (H + I))$  lo stesso insieme di rappresentanti  $\mathcal{B}$  di  $K/(K \cap (H + I))$  del punto precedente. Definiamo rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/((H + K) \cap (H + I))$  come  $\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{B}$ .
5. Similmente al punto precedente, scegliamo come insieme di rappresentanti per  $(H + I)/((H + K) \cap (H + I))$  lo stesso insieme  $\mathcal{A}$  di rappresentanti di  $I/(I \cap (H + K))$  che avevamo scelto al punto 2.
6. Sfruttando il lemma 4.12 scegliamo come insieme  $\mathcal{C}$  di rappresentanti di  $((H + K) \cap (H + I))/H$  un insieme di rappresentanti di  $K \cap I/K \cap I \cap H$ , e definiamo rappresentanti per il quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$  come  $\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ .
7. Definiamo i gruppi del tipo  $F_H$  del diagramma 4.3 usando questa scelta di rappresentanti.

Il punto saliente è che i rappresentanti per il quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$  ( $\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ ) sono gli stessi *sia* che si segua la parte sinistra del digramma (passando per  $F_{H+K}$ ), *sia* che si segua la parte destra (passando per  $F_{H+I}$ ), e inoltre valgono tutte le inclusioni controvarianti, visto che abbiamo seguito lo stesso procedimento dell'osservazione 4.7.

**Osservazione 4.14.** *I rappresentanti di  $(H + K)/H$  ( $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ ) ottenuti in questo modo appartengono a  $K$  (poichè vi appartengono gli elementi di  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{C}$ ). Pertanto lo stesso ragionamento seguito nella dimostrazione del lemma 4.9 ci dice che sono in realtà un insieme di rappresentanti di  $K/(H \cap K)$ . Lo stesso fatto vale ovviamente per l'insieme  $\mathcal{A} + \mathcal{C}$  che sarà un insieme di rappresentanti di  $I/(H \cap I)$ .*

Si può chiaramente ripetere il procedimento appena descritto (che ci ha fornito rappresentanti per il quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ ), anche per i sottogruppi  $K$  ed  $I$ .

Esponiamo ora la dimostrazione, per induzione sul numero di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , del lemma 4.8.

*Dimostrazione.* Il caso di due sottogruppi  $H$  e  $K$  è banale, basta infatti scegliere rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H+K)$  e successivamente per  $H+K/H$  in  $K$  e per  $H+K/K$  in  $H$  sfruttando 4.9.

Per quanto riguarda il passo induttivo, sia  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m, H_{m+1}\}$ . Fissiamo un sottogruppo (ad esempio  $H_1$ ). Supponiamo che si possano ottenere buoni rappresentanti per collezioni di sottogruppi di cardinalità  $m$ . Allora possiamo applicare questo enunciato a collezioni di sottogruppi del tipo

$$\{H_1 + H_2, H_1 + H_3, \dots, H_1 + H_{m+1}\}$$



ottenendo buoni rappresentanti, con il relativo diagramma di inclusioni di controvarianti, per ogni gruppo del tipo  $H_1 + H_i$ .

Consideriamo ora tutte le intersezioni del tipo

$$(H_1 + H_i) \cap (H_1 + H_j) = H_1 + (H_i \cap H_j).$$

Per 4.13, si possono scegliere come rappresentanti per il quoziente

$$(H_1 + H_i)/(H_1 + (H_i \cap H_j))$$

gli stessi rappresentanti di  $H_i/H_i \cap (H_1 + H_j)$  che avevamo già scelto (nel passo induttivo) per l'inclusione

$$H_1 + H_j < H_1 + H_i + H_j.$$

Procediamo similmente per il quoziente  $(H_1 + H_j)/(H_1 + (H_i \cap H_j))$ .

Successivamente consideriamo le intersezioni progressive tra gruppi così ottenuti, che saranno del tipo  $H_1 + \bigcap_{j=1}^{k+1} H_{i_j}$ . Sfruttando ancora il lemma 4.13, scegliamo come rappresentanti per

$$(H_1 + \bigcap_{j=1}^k H_{i_j})/(H_1 + \bigcap_{j=1}^{(k+1)} H_{i_j})$$

i rappresentanti per

$$(\bigcap_{j=1}^k H_{i_j})/(\bigcap_{j=1}^k H_{i_j} \cap (H_1 + H_{i_{(k+1)}}))$$

già scelti nel il passo induttivo per l'estensione

$$H_1 + H_{i_{(k+1)}} < H_1 + H_{i_{(k+1)}} + (\bigcap_{j=1}^k H_{i_j}).$$

Infine, scegliamo per l'estensione  $H_1 + (\bigcap_{i=2}^{m+1} H_i) < H_1$  un insieme di rappresentanti in  $\bigcap_{i=2}^{m+1} H_i$ .

Lo stesso procedimento che abbiamo applicato al gruppo  $H_1$  si può applicare a ogni gruppo  $H_i$ , ottenendo un insieme di diagrammi di inclusioni controvarianti. La scelta dei rappresentanti per le inclusioni comuni può essere resa indipendente dall'indice  $i$  (semplicemente, una volta scelti rappresentanti per i diagrammi relativi agli  $H_i$  con  $i < j$ , si scelgono gli stessi rappresentanti per le estensioni comuni nel diagramma relativo ad  $H_j$ ).  $\square$

Nel diagramma della pagina successiva ad esempio, i gruppi presi in considerazione sono quattro  $(H, K, I, J)$ . Il diagramma mostra tutti i cammini possibili per raggiungere  $F_H$  a partire da  $F_{H+K+I+J}$ . Le etichette indicano gli insiemi di rappresentanti per ogni estensione intermedia. Indipendentemente dal percorso scelto, si ha lo stesso insieme di rappresentanti per il

quoziente  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/H$ , dato da  $\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} + \mathcal{D} + \mathcal{E} + \mathcal{F} + \mathcal{G}$ . Si noti la presenza di sottodiagrammi isomorfi al diagramma 4.3.

$$\begin{array}{c}
F_H \\
\uparrow \mathcal{G} \\
F_{H+(K \cap I \cap J)} \\
\swarrow \mathcal{F} \quad \uparrow \mathcal{E} \quad \searrow \mathcal{D} \\
F_{H+(K \cap I)} \quad F_{H+(K \cap J)} \quad F_{H+(I \cap J)} \\
\swarrow \mathcal{C} + \mathcal{E} \quad \swarrow \mathcal{C} + \mathcal{F} \quad \swarrow \mathcal{B} + \mathcal{D} \quad \swarrow \mathcal{B} + \mathcal{F} \quad \swarrow \mathcal{A} + \mathcal{D} \quad \swarrow \mathcal{A} + \mathcal{E} \\
F_{H+K} \quad F_{H+I} \quad F_{H+J} \\
\uparrow \mathcal{D} \quad \uparrow \mathcal{E} \quad \uparrow \mathcal{F} \\
F_{H+K+(I \cap J)} \quad F_{H+I+(K \cap J)} \quad F_{H+J+(K \cap I)} \\
\swarrow \mathcal{B} \quad \swarrow \mathcal{C} \quad \swarrow \mathcal{A} \quad \swarrow \mathcal{C} \quad \swarrow \mathcal{A} \quad \swarrow \mathcal{B} \\
F_{H+K+I} \quad F_{H+K+J} \quad F_{H+I+J} \\
\swarrow \mathcal{A} \quad \swarrow \mathcal{B} \quad \swarrow \mathcal{C} \\
F_{H+K+I+J} \\
\uparrow \mathcal{K} \\
\{e\}
\end{array} \tag{4.4}$$

Concludendo, la scelta di rappresentanti appena descritta verifica la condizione del lemma 4.8, e pertanto abbiamo dimostrato il teorema 4.6.

## 4.2 Decomposizione del gruppo $\Omega_{\mathcal{S}}$

Fissiamo ora una famiglia  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m\}$  di sottogruppi. Indichiamo con  $\bigcap_{\mathcal{S}}$  il gruppo  $\bigcap_{i=1}^m H_i$  e, analogamente a quanto fatto in precedenza, sia

$$E_{\mathcal{S}} = E_{\bigcap_{\mathcal{S}}}.$$

Siano  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}'$  insiemi di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Il teorema 4.6 dice che, a meno di scegliere opportunamente i rappresentanti per tutti i quozienti, vale

$$F_{\mathcal{S} \cup \mathcal{S}'} = F_{\mathcal{S}} \cap F_{\mathcal{S}'}$$

Per la proposizione 4.4 varrà invece

$$E_{\mathcal{S} \cap \mathcal{S}'} = E_{\mathcal{S}} \cap E_{\mathcal{S}'}$$

In virtù di questo fatto, se  $\mathcal{S}$  è un insieme di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  e  $\Omega_{\mathcal{S}} = \bigcap_{H \in \mathcal{S}} G_H$ , per ogni  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  varrà

$$L_{\mathcal{S}'} = E_{\mathcal{S}'^c} \cap F_{\mathcal{S}'} < \Omega_{\mathcal{S}}. \quad (4.5)$$

dove  $\mathcal{S}'^c = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}'$ . Basta verificare che  $L_{\mathcal{S}'}$  è contenuto in ciascuno dei gruppi  $G_H$ . Sia quindi  $H \in \mathcal{S}$ . Se  $H \in \mathcal{S}'$  allora

$$L_{\mathcal{S}'} < F_H < G_H$$

mentre, se  $H \in \mathcal{S}'^c$  vale

$$L_{\mathcal{S}'} < E_H < G_H.$$

In ogni caso  $L_{\mathcal{S}'} < G_H$ , da cui segue 4.5.

Dimostriamo il seguente:

**Teorema 4.15.** *Sia  $\mathcal{S}$  un'insieme di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Allora i gruppi della forma  $L_{\mathcal{S}'}$ , per  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$  generano  $\Omega_{\mathcal{S}}$ .*

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno del seguente risultato:

**Proposizione 4.16.** *Per ogni coppia di sottogruppi  $H, K$  vale*

$$E_{H+K} \cap F_K = E_H \cap F_K.$$

*Dimostrazione.* Una inclusione è garantita dal fatto che  $E_H \subset E_{H+K}$ . Per l'altra, sia  $\sigma \in E_{H+K} \cap F_K$ , e  $x$  un elemento di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Allora  $x = k + a + y$ , con  $k \in \mathcal{K}$  insieme di rappresentanti di  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(H + K)$ ,  $a \in \mathcal{A} \subset H$  (per 4.8) insieme di rappresentanti di  $(H + K)/K$ , e  $y \in K$ . Necessariamente  $\sigma(x) = k' + a' + y$ , con  $k' \in \mathcal{K}$  e  $a' \in \mathcal{A}$ , dato che  $\sigma \in F_K$ . Ma  $k' = k$  poichè  $\sigma \in E_{H+K}$ , di conseguenza  $\sigma(x) - (x) = a' - a \in H$ , il che significa  $\sigma \in E_H$ .  $\square$

Procediamo alla dimostrazione del teorema 4.15

*Dimostrazione.* Sia  $\sigma \in \Omega_{\mathcal{S}}$ , con  $\mathcal{S} = \{H_1, \dots, H_m\}$ . Dato che  $\sigma$  permuta le classi laterali per tutti i gruppi  $H_i \in \mathcal{S}$ , permuta le classi laterali per i gruppi del tipo  $\Sigma_{\mathcal{S}'}$ , con  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ .

In particolare permuta le classi laterali per  $\Sigma_{\mathcal{S}}$  quindi, componendo con un elemento di  $L_{\mathcal{S}} = F_{\mathcal{S}}$  si ottiene una permutazione  $\sigma' \in \Omega_{\mathcal{S}}$  che fissa le classi laterali per  $\Sigma_{\mathcal{S}}$ , cioè appartiene a  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}}}$ .

Sia ora  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ , di cardinalità  $m - 1$ . Supponiamo  $H_i \notin \mathcal{S}'$ . Vogliamo ottenere, a partire da  $\sigma'$ , una permutazione in  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}}$ . Poichè  $\sigma' \in E_{\Sigma_{\mathcal{S}}}$ , è sufficiente comporla con una permutazione di  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}}} \cap F_{\mathcal{S}'}$ .

Per la proposizione 4.16

$$E_{\Sigma_{\mathcal{S}}} \cap F_{\mathcal{S}'} = E_{H_i} \cap F_{\mathcal{S}'} = L_{\mathcal{S}'}$$

Ripetiamo lo stesso procedimento per tutti i sottoinsiemi di  $\mathcal{S}$  di cardinalità  $m - 1$ .

In generale, sia data una permutazione  $\sigma$  tale che

$$\forall \mathcal{S}' \subset \mathcal{S} : |\mathcal{S}'| = k + 1, \sigma \in E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}}$$

cioè una permutazione che fissa le classi laterali per tutti i gruppi ottenuti sommando  $k + 1$  elementi di  $\mathcal{S}$ . Si vuole ottenere una permutazione  $\sigma'$  tale che

$$\forall \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S} : |\mathcal{S}''| = k, \sigma' \in E_{\Sigma_{\mathcal{S}''}}$$

Per fare ciò, è sufficiente, per ogni  $\mathcal{S}''$  di cardinalità  $k$  comporre  $\sigma$  con una permutazione in

$$\bigcap_{H_i \notin \mathcal{S}''} (F_{\mathcal{S}''} \cap E_{(\Sigma_{\mathcal{S}''} + H_i)}).$$

Per 4.4 e 4.16 questo gruppo è uguale a

$$F_{\mathcal{S}''} \cap E_{\mathcal{S}''^c} = L_{\mathcal{S}}$$

Si otterrà infine infine una permutazione in  $E_{H_i} \forall H_i \in \mathcal{S}$ , cioè un elemento di  $E_{\mathcal{S}} = L_{\emptyset}$ .  $\square$

Ora che abbiamo esibito dei generatori per il gruppo  $\Omega_{\mathcal{S}}$ , vogliamo studiare la loro struttura. Si consideri quindi  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ . Si indichi con  $m$  l'indice di  $\Sigma_{\mathcal{S}'}$  in  $\Sigma_{\mathcal{S}'} + \bigcap_{\mathcal{S}'^c}$  e con  $d$  l'indice di  $\Sigma_{\mathcal{S}'} + \bigcap_{\mathcal{S}'^c}$  in  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Vale la seguente relazione

$$L_{\mathcal{S}'} \cong \underbrace{S_m \times \dots \times S_m}_{d \text{ volte}}. \quad (4.6)$$

*Dimostrazione.*  $F_{\mathcal{S}'}$  è generato da permutazioni  $\sigma_{ij}$  con  $i, j$  appartenenti a un insieme di rappresentanti per  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\Sigma_{\mathcal{S}'}$ . Per la scelta di rappresentanti descritta precedentemente, questo insieme di rappresentanti è della forma  $\mathcal{K} + \mathcal{A}$ , dove  $\mathcal{K}$  e  $\mathcal{A} \subset \bigcap_{\mathcal{S}'^c}$  sono rappresentanti rispettivamente di  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/(\Sigma_{\mathcal{S}'} + \bigcap_{\mathcal{S}'^c})$  e di  $(\Sigma_{\mathcal{S}'} + \bigcap_{\mathcal{S}'^c})/\Sigma_{\mathcal{S}'}$ .

Se  $\sigma \in L_{\mathcal{S}'} = E_{\mathcal{S}'^c} \cap F_{\mathcal{S}'}$  e  $i = k + a \in \mathcal{K} + \mathcal{A}$ , si deve avere  $\sigma(i) = k' + a' \in \mathcal{K} + \mathcal{A}$ , con  $i - \sigma(i) = (k - k') + (a - a') \in \bigcap_{\mathcal{S}'^c}$ . Pertanto necessariamente  $k = k'$ .

Infine basta notare che  $\sigma \in L_{\mathcal{S}'}$  è determinato dalla sua azione sull'insieme di rappresentanti  $\mathcal{K} + \mathcal{A}$  e, in virtù del ragionamento precedente, una volta fissato  $k \in \mathcal{K}$ , deve agire su ciascun insieme della forma  $k + \mathcal{A}$  come una permutazione dei suoi  $m$  elementi. Poichè  $|\mathcal{K}| = d$  si ha la tesi.  $\square$

Per concludere lo studio del gruppo  $\Omega_S$ , rimangono ora da stabilire le relazioni che intercorrono tra i sottogruppi che lo generano. Vogliamo mostrare che  $\Omega_S$  si decompone in una *catena di prodotti semidiretti* nel senso della definizione induttiva che segue:

**Definizione 4.17.** *Sia  $G$  un gruppo, e  $\{H_1, \dots, H_m\}$  un insieme di suoi sottogruppi.  $G$  è prodotto semidiretto dei sottogruppi  $\{H_1, \dots, H_m\}$ , cioè  $G = H_1 \rtimes H_2 \rtimes \dots \rtimes H_m$  se*

1. *Per  $m = 2$ ,  $G = H_1 \rtimes H_2$ , ossia  $G = \langle H_1, H_2 \rangle$ ,  $H_1$  è normale in  $G$  e  $H_1 \cap H_2 = \{1\}$ .*
2. *Se  $G' = H_1 \rtimes H_2 \rtimes \dots \rtimes H_{m-1}$ ,  $G = G' \rtimes H_m$ , ossia  $G = \langle G', H_m \rangle$ ,  $G'$  è normale in  $G$  e  $G' \cap H_m = \{1\}$ .*

**Osservazione 4.18.** *Procedendo per induzione su  $m$ , è possibile dare una definizione astratta di catena di prodotti semidiretti di gruppi  $H_1, \dots, H_n$  richiedendo, per  $2 \leq i \leq n$ , di avere dato un'omomorfismo di  $H_i$  nel gruppo di automorfismi di  $\rtimes_{j=1}^{i-1} H_j$ .*

Sia ora  $\mathcal{S}$  un'insieme di sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Consideriamo i gruppi del tipo  $L_{\mathcal{S}'}$  per  $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ . Ordiniamoli (ponendo  $L_{\mathcal{S}'} = L_{i_{\mathcal{S}'}}$ ) in modo che valga

$$|\mathcal{S}''| < |\mathcal{S}'| \Rightarrow i_{\mathcal{S}''} < i_{\mathcal{S}'}. \quad (4.7)$$

**Teorema 4.19.**

$$\Omega_S \cong \rtimes_{\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}} L_{i_{\mathcal{S}'}}.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $\mathcal{S}'$ . Sia  $K_{\mathcal{S}'}$  il gruppo generato dagli  $L_j$  per  $j < i_{\mathcal{S}'}$ . Per ogni tale  $j$ , varrà  $j = i_{\mathcal{S}''}$  con  $|\mathcal{S}''| \leq |\mathcal{S}'|$  (4.7), per cui  $L_j < E_{\mathcal{S}''^c}$  e  $\mathcal{S}''^c \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset$ . Allora, per ogni  $j$ ,  $L_j < E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}}$  grazie all'osservazione 4.5. Ma  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}} \cap F_{\mathcal{S}'} = \{1\}$ , da cui discende

$$K_{\mathcal{S}'} \cap L_{i_{\mathcal{S}'}} = \{1\}.$$

Si noti ora che  $K_{\mathcal{S}'}$  coincide con il sottogruppo di  $\Omega_S$  che fissa le classi laterali per tutti i gruppi della forma  $\Sigma_{\mathcal{S}''}$  con  $i_{\mathcal{S}''} \geq i_{\mathcal{S}'}$ . Sia  $\sigma \in L_{\mathcal{S}'} = F_{\mathcal{S}'} \cap E_{\mathcal{S}'^c}$ .

Se  $\gamma \in K_{\mathcal{S}'}$ ,  $\sigma\gamma\sigma^{-1}$  apparterrà a  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}}$ , poichè  $E_{\Sigma_{\mathcal{S}'}}$  è invariante per l'azione di  $F_{\mathcal{S}'}$  data dal coniugio.

Se  $\mathcal{S}'' \neq \mathcal{S}'$ , poichè per 4.7 non si può avere  $\mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}'$ , vale  $\mathcal{S}'' \cap \mathcal{S}'^c \neq \emptyset$ . Supponiamo che  $H$  appartenga a tale insieme. Allora  $\sigma \in E_H \subset E_{\Sigma_{\mathcal{S}''}}$  grazie a 4.5, per cui  $\sigma\gamma\sigma^{-1} \in E_{\Sigma_{\mathcal{S}''}}$ . Quindi  $K_{\mathcal{S}'}$  è invariante per l'azione di  $L_{\mathcal{S}'}$  data dal coniugio.

Per il lemma 4.15 i gruppi della forma  $L_{i_{\mathcal{S}'}}$  generano  $\Omega_S$ , da cui la tesi.  $\square$

### 4.3 Esempi

Forniamo ora due esempi di calcolo del gruppo  $\Omega_{\mathcal{S}}$ . Un caso particolarmente interessante è quello che si ottiene scegliendo per  $\mathcal{S}$  la famiglia di tutti i sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Il calcolo del relativo gruppo ci dice a meno di quali trasformazioni possiamo sperare di classificare le serie usando il meccanismo dei diagrammi di Gauss generalizzati. Sappiamo già, grazie all'osservazione 4.3, che in generale vale  $Aff(n) < \Omega_{\mathcal{S}}$ . Si ha l'uguaglianza nel caso musicalmente rilevante di  $n = 12$ . Più precisamente:

**Proposizione 4.20.** *Sia  $\mathcal{S}$  l'insieme di tutti i sottogruppi non banali di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ . Allora  $\Omega_{\mathcal{S}} = Aff(12)$ .*

*Dimostrazione.* Mostriamo che i due gruppi hanno lo stesso ordine. Il gruppo  $Aff(12)$  ha ordine  $\phi(12) \cdot 12 = 4 \cdot 12 = 48$ , dove  $\phi$  indica la funzione di Eulero. Siano  $I, J, H, K$  i sottogruppi di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  di ordini rispettivamente 2, 3, 4 e 6. Effettuando i calcoli e sfruttando l'equazione 4.6, si può verificare che sono solo tre i sottogruppi generatori di  $\Omega_{\mathcal{S}}$  diversi dall'identità:  $L_{\{I,J,K\}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $L_{\{I,H\}} \cong S_3$  e  $L_{\{J\}} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Si avrà  $\Omega \cong (L_{\{J\}} \times L_{\{I,H\}}) \times L_{\{I,J,K\}}$ , e  $|\Omega_{\mathcal{S}}| = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ , da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 4.21.** *Sia  $\mathcal{S}$  come nella proposizione precedente. Allora*

$$\Lambda_{\mathcal{S}} \cong Aff(12) \times \mathbb{D}_{12}.$$

Il risultato precedente non è però valido in generale. Ad esempio si consideri  $n = 15$ . Il gruppo degli interi modulo 15 ha solo due gruppi non banali  $H$  e  $K$  di ordini rispettivamente 3 e 5. Se  $\mathcal{S} = \{H, K\}$

$$\Omega_{\mathcal{S}} \cong F_H \cap E_K \times F_K \cap E_H.$$

$F_H \cap E_K \cong S_5$  e  $F_K \cap E_H \cong S_3$ , per cui  $|\Omega_{\mathcal{S}}| = 5! \cdot 3!$ . Questo numero è strettamente maggiore dell'ordine del gruppo delle trasformazioni affini ( $\phi(15) \cdot 15 = 8 \cdot 15$ ). Da ciò si evince che in generale l'inclusione  $Aff(n) < \Omega_{\mathcal{S}}$  (dove  $\mathcal{S}$  è l'insieme di tutti i sottogruppi di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ) è *propria*.

#### 4.3.1 Le trasformazioni affini nella musica seriale

La musica seriale è una tecnica compositiva che prevede l'utilizzo di una *serie* di valori per manipolare i diversi elementi musicali. In questo senso la musica dodecafonica ne costituisce, anche da un punto di vista storico, il primo esempio. Il concetto di musica seriale è però più ampio, in particolare le trasformazioni che regolano l'evoluzione di un brano sono applicabili non solo a serie di note, ma anche a strutture più complicate come insiemi di battute, o a parametri diversi dall'altezza delle note, come la durata e l'intensità.

Vi è anche una maggiore libertà nella scelta dei gruppi di *trasformazioni* degli oggetti musicali. In questo senso il gruppo delle trasformazioni dodecafoniche (quello generato da trasposizione, inversione e retrogradazione) è solo una delle scelte possibili. Più volte esso è stato esteso con le trasformazioni di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  che, nella letteratura musicale, vengono chiamate  $M5$  e  $M7$ , rispettivamente le trasformazioni affini  $x \rightarrow 5 \cdot x$  e  $x \rightarrow 7 \cdot x$ . Queste due trasformazioni, unitamente alle trasposizioni  $x \rightarrow x + k$  e all'inversione  $x \rightarrow -x$  generano il gruppo delle trasformazioni  $Aff(12)$ . Si noti che, per il corollario 4.21 il gruppo  $Aff(12)$  costituisce un fattore (quello che agisce su  $S_{12}$  a sinistra) del gruppo di invarianza dei diagrammi di Gauss generalizzati.

In bibliografia sono indicati alcuni lavori che trattano dell'utilizzo delle trasformazioni affini nella musica seriale. In particolare [10] e [12] descrivono l'applicazione delle trasformazioni affini a diversi oggetti musicali, mentre [9] e [11] contengono esempi di analisi di brani nei quali le trasformazioni affini svolgono un ruolo centrale.





## Capitolo 5

# Enumerazione dei diagrammi di Gauss generalizzati

Vogliamo ora capire, fissati come al solito un intero  $n$  e un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , quanti sono i diagrammi di Gauss generalizzati di ordine  $n$  con  $H$  come sottogruppo caratteristico. La ragione per cui affrontiamo questo problema è che i diagrammi di Gauss vogliono innanzitutto costituire uno strumento di classificazione di un insieme estremamente grande quale quello delle serie. A questo scopo è conveniente limitarsi ai sottogruppi che danno un numero basso di diagrammi (come nel caso  $n = 12$  e  $H = \langle 6 \rangle$ ), al fine di poterli elencare tutti.

Come già detto, l'enumerazione dei diagrammi di Gauss costruiti unendo i tritoni (2.6) è reperibile in [2]. In questo capitolo generalizzeremo l'approccio seguito da Khruzin, in modo da poter estendere la numerazione ai diagrammi generalizzati.

Faremo inoltre un'ulteriore generalizzazione. Nei capitoli precedenti i diagrammi di Gauss generalizzati sono stati definiti a meno dell'azione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$  sull'insieme delle partizioni di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Invece del gruppo diedrale, basta scegliere un generico gruppo  $A$  e una sua azione  $\xi$  sull'insieme degli interi modulo  $n$ . Fissato come al solito un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , si otterrà in modo ovvio un'azione  $\xi'$  sull'insieme  $\mathcal{P}^H$  delle  $H$ -partizioni, e una famiglia di diagrammi costituita dagli elementi dell'insieme

$$\mathcal{P}^H/A.$$

In analogia con quanto fatto in precedenza, si definisce il diagramma di Gauss generalizzato associato a una serie  $s$ , come la classe di equivalenza della partizione  $P_s^H$  in  $\mathcal{P}/A$ .

Oltre al gruppo diedrale, scelte plausibili per  $A$  possono essere il gruppo delle trasformazioni affini  $Aff(n)$  o il gruppo ciclico  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Va notato che, in quest'ultimo caso, le serie ottenute una dall'altra per retrogradazione potrebbero essere associate a diagrammi diversi. Tutto quanto dimo-

strato in precedenza varrà anche in questo caso, in particolare si avrà la decomposizione del gruppo di invarianza  $\Gamma_H$  dei diagrammi come  $G_H \times A$ .

Come già detto (lemma 2.6) il caso  $n = 12$ ,  $H = \langle 6 \rangle$  è già stato trattato in [2]. Generalizzeremo l'approccio seguito in quel caso.

Consideriamo un sottogruppo  $H$  di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  di ordine  $m$  e indice  $d$ . Un diagramma di Gauss generalizzato può essere definito a partire da un'applicazione biunivoca

$$f : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}.$$

Le immagini dei  $d$  insiemi della forma  $\{1, \dots, m\} \times \{k\}$  per  $k \in \{1, \dots, d\}$  forniscono (poichè  $f$  è una bigezione), una partizione di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in  $d$  insiemi di cardinalità  $m$ , ossia un elemento di  $\mathcal{P}^H$ . Indicando con  $\mathcal{F}$  l'insieme delle bigezioni tra  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$  e  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , si ottiene quindi un'applicazione surgettiva

$$\Omega : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}^H$$

Si può quindi associare un diagramma di Gauss generalizzato a una funzione  $f \in \mathcal{F}$  considerando la classe di equivalenza di  $\Omega(f)$  in  $\mathcal{P}^H/A$ .

Notiamo che su  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$  si ha l'azione  $\chi$  del gruppo  $G_H = E_H \times F_H$  definito in precedenza.  $E_H$  agisce permutando tra loro gli elementi di insiemi del tipo  $\{1, \dots, m\} \times \{k\}$  (in modo da fissare ciascuno di questi insiemi).  $F_H$  che agisce permutando tra loro gli insiemi del tipo  $\{1, \dots, m\} \times \{k\}$  tramite trasformazioni del tipo  $(i, k) \rightarrow (i, k')$ .

**Proposizione 5.1.** *Con le identificazioni fatte, due mappe bigettive*

$$f_1, f_2 : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\} \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$$

definiscono lo stesso diagramma di Gauss generalizzato se e solo se esistono  $\sigma \in G_H$  e  $\alpha \in A$  tale che

$$f_1 \circ \chi(\sigma) = \xi(\alpha) \circ f_2. \quad (5.1)$$

*Dimostrazione.* Si verifica che, date  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  vale

$$\Omega(f_1) = \Omega(f_2) \Leftrightarrow \exists \sigma \in G_H : f_1 \circ \chi(\sigma) = f_2. \quad (5.2)$$

Infatti, se le immagini di insiemi della forma  $\{1, \dots, m\} \times k$  inducono la stessa partizione, è possibile scegliere  $\gamma \in F_H$  in modo che, per ogni  $k \in \{1, \dots, d\}$  valga

$$f_1 \circ \chi(\gamma)(\{1, \dots, m\} \times k) = f_2(\{1, \dots, m\} \times k).$$

Successivamente si può scegliere  $\mu \in E_H$  in modo che valga per ogni  $(j, k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$

$$f_1 \circ \chi(\gamma) \circ \chi(\mu) \cdot (j, k) = f_1 \circ \chi(\gamma \cdot \mu) \cdot (j, k) = f_2 \cdot (j, k).$$

Indichiamo con  $[\Omega(f)]$  la classe di equivalenza di  $\Omega(f)$  in  $\mathcal{P}^H/A$ . Se  $[\Omega(f_1)] = [\Omega(f_2)]$ , significa che esiste  $\alpha \in A$  tale che

$$\Omega(f_1) = \xi'(\alpha) \cdot \Omega(f_2).$$

Poichè, per ogni  $f \in \mathcal{F}$  e  $\alpha \in A$  vale

$$\xi'(\alpha) \cdot \Omega(f) = \Omega(\xi(\alpha) \circ f) \quad (5.3)$$

per 5.3 si ottiene

$$[\Omega(f_1)] = [\Omega(f_2)] \Leftrightarrow \exists \alpha \in A : \Omega(f_1) = \Omega(\xi(\alpha) \circ f_2)$$

e grazie a 5.2

$$[\Omega(f_1)] = [\Omega(f_2)] \Leftrightarrow \exists \alpha \in A, \exists \sigma \in G_H : f_1 \circ \chi(\sigma) = \xi(\alpha) \circ f_2.$$

□

**Definizione 5.2.** Data una permutazione  $\tau \in S_n$ , definiamo tipo di ciclo di  $\tau$ , e indichiamo con  $c^\tau$ , la  $n$ -upla  $(c_1^\tau, \dots, c_n^\tau)$ , dove  $c_i^\tau$  consiste nel numero di cicli di lunghezza  $i$  nella scrittura di  $\tau$  come composizione di cicli disgiunti.

Con un abuso di notazione, indichiamo con  $c_i^\sigma$  il valore di  $c_i^{\chi(\sigma)}$  per  $\sigma \in G_H$  e similmente con  $c_i^\alpha$  il valore di  $c_i^{\xi(\alpha)}$  per  $\alpha \in A$ .

**Proposizione 5.3.** Il numero di diagrammi di Gauss generalizzati con  $H$  come sottogruppo caratteristico, ottenuti tramite l'azione di un gruppo  $A$  è

$$\frac{1}{|G_H| \cdot |A|} \sum_{\alpha \in A} \cdot \sum_{\sigma \in G_H} \cdot \prod_{j: c_j^\sigma \neq 0} j^{c_j^\sigma} c_j^\alpha (c_j^\alpha - 1)(c_j^\alpha - 2) \dots (c_j^\alpha - c_j^\sigma + 1) \quad (5.4)$$

con la convenzione che il prodotto è uguale a 0 se  $c_j^\sigma > c_j^\alpha$  per qualche  $j$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo che la condizione espressa in 5.1 è una relazione di equivalenza  $\sim$  sull'insieme  $\mathcal{F}$  delle bigezioni tra  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$  e  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

1. Se  $f_1 \sim f_2$ , allora esistono  $\sigma$  e  $\alpha$  tali che  $f_1 \circ \chi(\sigma) = \xi(\alpha) \circ f_2$ . Poichè  $\chi(\sigma)$  e  $\xi(\alpha)$  sono premutazioni rispettivamente di  $G_H$  e  $A$ ,  $f_1$  è una bigezione se e solo se lo è  $f_2$ .
2. Chiaramente  $f \sim f$ . Per verificarlo, è sufficiente prendere per  $\sigma$  e  $\alpha$  le identità rispettivamente in  $G_H$  e  $A$ .
3. Se  $f_1 \sim f_2$ , allora  $f_1 \circ \chi(\sigma) = \xi(\alpha) \circ f_2$ . Allora

$$f_2 \circ \chi(\sigma^{-1}) = \xi(\alpha^{-1}) \circ f_1$$

da cui segue  $f_2 \sim f_1$ .

4. Se  $f_1 \sim f_2$  e  $f_2 \sim f_3$ , significa che esistono  $\alpha_1, \alpha_2 \in A$  e  $\sigma_1, \sigma_2 \in G_H$  tali che

$$f_1 \circ \chi(\sigma_1) = \xi(\alpha_1) \circ f_2, \quad f_2 \circ \chi(\sigma_2) = \xi(\alpha_2) \circ f_3.$$

Allora per composizione

$$f_1 \circ \chi(\sigma_1\sigma_2) = \xi(\alpha_1\alpha_2) \circ f_2$$

da cui segue  $f_1 \sim f_3$ .

Si tratta quindi di stabilire l'ordine dell'insieme  $\mathcal{F}/\sim$ . Per risolvere questo problema, seguiamo il procedimento di de Bruijn ([5]).

Consideriamo il prodotto  $G_H \times A$ . Un generico elemento  $(\sigma, \alpha)$  di tale gruppo agisce sull'insieme  $\mathcal{F}$  nel modo seguente:

$$(\sigma, \alpha) \cdot f = \xi(\alpha) \circ f \circ \chi(\sigma^{-1}).$$

Dobbiamo stabilire il numero di orbite per tale azione. Per il lemma di Burnside ([3]) vale

$$|\mathcal{F}/\sim| = |G_H|^{-1}|A|^{-1} \sum_{\alpha \in A} \sum_{\sigma \in G_H} |X_{(\sigma, \alpha)}|. \quad (5.5)$$

$$X_{(\sigma, \alpha)} = \{f \in \mathcal{F} : (\sigma, \alpha) \cdot f = \xi(\alpha) \circ f \circ \chi(\sigma^{-1}) = f\}.$$

Fissiamo ora  $\sigma$  e  $\alpha$  e calcoliamo l'ordine di  $X_{(\sigma, \alpha)}$ . Sia  $f$  in tale insieme e  $x \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, d\}$  appartenente a un ciclo di lunghezza  $j$  per  $\chi(\sigma)$ . Il ciclo a cui  $x$  appartiene sarà costituito dagli elementi

$$x, \chi(\sigma) \cdot x, \chi(\sigma^2) \cdot x, \dots, \chi(\sigma^{j-1}) \cdot x \quad (5.6)$$

e varrà  $\chi(\sigma^j) \cdot x = x$ . Notiamo che la condizione  $\xi(\alpha) \circ f \circ \chi(\sigma^{-1}) = f$  implica in particolare

$$f \circ \chi(\sigma^i) = \xi(\alpha^i) \circ f$$

per ogni intero  $i$ . Pertanto  $f$  manda gli elementi di 5.6 in

$$f(x), \xi(\alpha) \cdot f(x), \xi(\alpha^2) \cdot f(x), \dots, \xi(\alpha^{j-1}) \cdot f(x) \quad (5.7)$$

e  $\xi(\alpha^j) \cdot f(x) = f(x)$ . Da questo segue che la lunghezza del ciclo per  $\xi(\alpha)$  a cui  $f(x)$  appartiene è un divisore di  $j$ . Ma  $f$  è una bigezione, per cui non possono esservi ripetizioni nella successione 5.7. Pertanto  $f(x)$  appartiene a un ciclo di lunghezza  $j$ . Da questo segue che:

1. Cicli di lunghezza  $j$  per  $\chi(\sigma)$  sono mappati da  $f$  in cicli di lunghezza  $j$  per  $\xi(\alpha)$ .
2. Cicli diversi per  $\chi(\sigma)$  sono mappati in cicli diversi per  $\xi(\alpha)$ , poichè  $f$  è una bigezione.

A questo punto è facile descrivere tutte le  $f$  appartenenti a  $X_{(\sigma,\alpha)}$ . Per costruire una tale  $f$  è sufficiente, per ogni ciclo  $C$  di  $\xi(\alpha)$ , scegliere un ciclo per  $\chi(\sigma)$  della stessa lunghezza, avendo cura di scegliere ogni ciclo per  $\chi(\sigma)$  una sola volta. Una volta effettuata una tale scelta, se  $j$  è la lunghezza dei cicli in questione, abbiamo  $j$  modi di associarne gli elementi. Scelto infatti  $x$  in un ciclo  $C$ , imponendo  $f(x) = y$ , determiniamo l'immagine degli altri elementi di  $C$  grazie alla condizione

$$f(\chi(\sigma^i) \cdot x) = \xi(\alpha^i) \cdot y.$$

Notiamo che, fissato  $j$ , ci sono  $c_j^\sigma$  cicli di lunghezza  $j$  per  $\chi(\sigma)$  e  $c_j^\alpha$  per  $\xi(\alpha)$ . Dobbiamo quindi costruire un'applicazione iniettiva tra un insieme di  $c_j^\sigma$  elementi e uno di  $c_j^\alpha$  elementi. Per fare ciò abbiamo

$$c_j^\alpha \cdot (c_j^\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (c_j^\alpha - c_j^\sigma + 1)$$

possibilità se  $0 < c_j^\sigma \leq c_j^\alpha$ , zero altrimenti.

In conclusione, l'ordine di  $X_{(\sigma,\alpha)}$  è pari a

$$\prod_{j:c_j^\sigma \neq 0} j^{c_j^\sigma} c_j^\alpha (c_j^\alpha - 1) \dots (c_j^\alpha - c_j^\sigma + 1)$$

e, sostituendo in 5.5, si ottiene la tesi. □



## Capitolo 6

# Gli spazi di accordi

Abbandoniamo ora l'ambito delle serie dodecafoniche per presentare una costruzione particolarmente elegante e significativa nell'ambito della teoria matematica della musica. Ci interessa studiare il più semplice degli oggetti musicali armonici: *l'accordo*, ossia *l'esecuzione simultanea di più note*. Per quanto la formalizzazione algebrica degli accordi musicali rappresenti uno degli aspetti centrali di varie teorie matematiche della musica ([17], [1]), lo studio delle proprietà geometriche degli spazi musicali in cui vivono gli accordi è stato condotto recentemente ([6], [7]) attraverso l'utilizzazione della teoria degli orbifolds. Lo ripresentiamo in questo capitolo, fornendo anche le relative dimostrazioni.

Una  $n$ -upla di note può, per quanto detto nel primo capitolo, essere rappresentata come un punto sullo spazio prodotto

$$\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ volte}} = \mathcal{T}^n$$

il toro  $n$ -dimensionale.

Nella definizione di un accordo siamo interessati solo all' *insieme delle note* e non al loro ordine. Pertanto dobbiamo quozientare  $\mathcal{T}^n$  per il gruppo  $S_n$  di permutazioni delle coordinate:

**Definizione 6.1.** *Un accordo di  $n$  note è un elemento dello spazio quoziente*

$$\mathcal{T}^n/S_n = \mathcal{A}_n.$$

Si noti che  $\mathcal{T}^n$  è una varietà differenziabile ed è munita della metrica a curvatura zero ereditata da  $\mathcal{R}^n$  tramite l'azione del gruppo di traslazioni per coordinate intere  $T^n$ . Su  $\mathcal{T}^n$  agisce tramite *isometrie* il gruppo  $S_n$  di permutazione delle coordinate. Il quoziente  $\mathcal{A}_n$  eredita quindi da  $\mathcal{T}^n$  la struttura di spazio metrico. Si noti inoltre che le permutazioni delle coordinate sono *diffeomorfismi* di  $\mathcal{T}^n$  in sé.

Andiamo a studiare più in dettaglio l'azione di  $S_n$ .

**Definizione 6.2.** Sia  $G$  un gruppo topologico e supponiamo che agisca su uno spazio topologico  $X$ . Se l'applicazione

$$\phi : G \times X \rightarrow X$$

che definisce l'azione è un'applicazione continua rispetto alla topologia prodotto su  $G \times X$  l'azione è detta continua.

**Osservazione 6.3.** Se il gruppo  $G$  della definizione 6.2 è discreto, richiedere che l'azione sia continua è equivalente a richiedere che, per ogni  $g \in G$ , l'applicazione  $x \rightarrow g \cdot x$  sia un omeomorfismo di  $X$  in sé.

**Definizione 6.4.** Sia data un'azione continua di un gruppo discreto  $G$  su uno spazio topologico  $X$ . Se, per ogni  $x \in X$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  con la proprietà che l'insieme dei  $g \in G$  tali che  $g(U) \cap U \neq \emptyset$  sia finito, l'azione si definisce discontinua.

L'azione su  $\mathcal{T}^n$  del gruppo  $S_n$  di permutazione delle coordinate è discontinua. Infatti gli elementi di  $S_n$  agiscono tramite diffeomorfismi (e sono, in particolare, omeomorfismi). Inoltre  $S_n$  è un gruppo finito, e quindi la condizione espressa nella definizione 6.4 è soddisfatta.

**Definizione 6.5.** Si definisce orbifold uno spazio ottenuto a partire da una varietà differenziabile  $M$  tramite quoziente per l'azione di un gruppo discreto  $G$  che agisca su di essa tramite diffeomorfismi e in modo discontinuo.

Esiste una definizione più generale di orbifold, ottenuta a partire da un ricoprimento con carte con opportune proprietà. Per i nostri scopi però, la definizione 6.5 è sufficiente. Per una trattazione generale della teoria degli orbifold, si veda [8].

Un risultato classico di topologia afferma che, se all'ipotesi di avere un'azione discontinua di un gruppo  $G$  su una varietà  $M$  si aggiunge l'ipotesi che l'azione di  $G$  sia priva di punti fissi, cioè

$$\forall x \in M : g \cdot x = x \Rightarrow g = 1$$

la proiezione  $\pi : M \rightarrow M/G$  è un *rivestimento* e quindi conserva la topologia locale.

Nel contesto della definizione 6.5 quindi, ci aspettiamo che la proiezione  $M \rightarrow M/G$  conservi la topologia locale nell'intorno dei punti  $x \in M$  con stabilizzatore banale in  $G$ . Si tratta di capire cosa succede se si sceglie un  $x \in M$  tale che  $Stab(x) = \{g \in G | g \cdot x = x\}$  sia diverso dalla sola identità.

Supponiamo quindi di avere un  $x \in M$  con stabilizzatore non banale. Allora esiste un intorno  $U$  di  $x$ , invariante sotto l'azione di  $Stab(x)$ , e con la proprietà che  $g \in G \setminus Stab(x) \Rightarrow U \cap g(U) = \emptyset$ . In virtù di questo fatto, la topologia locale di  $y = \pi(x)$  in  $M$  è quella di  $U/Stab(x)$ , ossia un quoziente di  $\mathbb{R}^n$  per l'azione di un gruppo finito. I punti di  $M/G$  corrispondenti a punti con stabilizzatore non banale si dicono *punti singolari*.



## 6.1 Topologia degli spazi di accordi

**Teorema 6.6.** *Lo spazio degli accordi  $\mathcal{A}_n$  è uno spazio metrico ottenuto a partire da un prisma retto con base un tetraedro  $(n - 1)$ -dimensionale, identificando le basi tramite la relazione di equivalenza indotta da una permutazione ciclica dei vertici.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo quozientare  $\mathbb{R}^n$  per l'azione del gruppo di isometrie  $G = \langle T^n, S_n \rangle$ , dove  $T^n$  è il gruppo di traslazioni per coordinate intere, e  $S_n$  il gruppo di permutazioni delle coordinate. Denotiamo con  $\tau_i$  l'isometria  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_n)$ , e con  $\sigma_{ij}$  la permutazione delle coordinate  $x_i$  e  $x_j$ .

Notiamo innanzitutto che  $T^n \cap S_n = \{e\}$  e che  $T^n$  è normale in  $G$ , per cui  $G$  è isomorfo al prodotto semidiretto  $T^n \rtimes S_n$  (con l'azione di  $S_n$  su  $T^n$  data dal coniugato). Consideriamo gli iperpiani della forma

$$C_t = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = t\}.$$

Vogliamo studiare il sottogruppo  $F < G$  delle isometrie che fissano ogni  $C_t$ .

Una isometria  $g$  di tale tipo deve potersi scrivere come  $\sigma\tau$ , con  $\sigma \in S_n$  e  $\tau \in T^n$  del tipo  $\tau_1^{e_1} \dots \tau_n^{e_n}$  e  $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ . Mostriamo per induzione sul numero  $m$  di esponenti  $e_i$  non nulli che  $\tau$  deve appartenere al gruppo generato dai coniugati di elementi di  $S_n$ .

1.  $m$  è certamente maggiore o uguale a 2. Infatti, se  $\tau = \tau_1^{e_1} \dots \tau_n^{e_n}$  si deve necessariamente avere  $\sum e_i = 0$  affinché  $\tau$  lasci invariata la somma delle coordinate.
2. Se  $m = 2$ ,  $\tau = \tau_i^k \tau_j^{-k} = (\tau_i \tau_j^{-1})^k$ ,  $\tau_i \tau_j^{-1} = \sigma_{ij} \tau_i^{-1} \sigma_{ij} \tau_i$ .
3. Supponiamo che l'enunciato sia vero per tutti gli interi fino a  $m$  e dimostriamolo per  $m + 1$ . Poniamo

$$\tau = \tau_{i_1}^{e_1} \dots \tau_{i_{m+1}}^{e_{m+1}} = (\tau_{i_1}^{e_1} \dots \tau_{i_m}^{e_m + e_{m+1}}) (\tau_{i_m}^{-e_{m+1}} \tau_{i_{m+1}}^{e_{m+1}}).$$

Poichè vale  $\sum_{i=1}^{m+1} e_i = 0$ , per ipotesi induttiva i due termini tra parentesi sono esprimibili come prodotto di coniugati di elementi di  $S_n$ , quindi anche  $\tau$ .

Quindi  $F$  è il più piccolo sottogruppo normale contenente  $S_n$ . Esso è generato dagli elementi del tipo  $\tau \sigma_{ij} \tau^{-1}$ .

Si rende quindi necessario studiare le trasformazioni della forma  $\tau \sigma_{ij} \tau^{-1}$ . Distinguiamo alcuni casi:

1.  $\tau = \tau_k^m$ , con  $k \neq i, j$ . In tal caso si verifica che  $\tau_k^m \sigma_{ij} \tau_k^{-m} = \sigma_{ij}$ .

2.  $\tau = \tau_k^m$ , con  $k = i$  o  $k = j$  (a meno di permutare  $i$  e  $j$ , si può supporre  $k = j$ ). In tal caso

$$\begin{aligned} \tau_j^m \sigma_{ij} \tau_j^{-m}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) &= \\ \tau_j^m \sigma_{ij}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j - m, \dots, x_n) &= \\ \tau_j^m(x_1, \dots, x_j - m, \dots, x_i, \dots, x_n) &= \\ (x_1, \dots, x_j - m, \dots, x_i + m, \dots, x_n). & \end{aligned}$$

Pertanto  $\tau_j^n \sigma_{ij} \tau_j^{-n}$  corrisponde alla riflessione rispetto all'iperpiano  $x_j - x_i = n$ .

Dobbiamo individuare un dominio fondamentale per l'azione di  $G$ . Questi è dato da  $P = C \cap D$ , con

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i \in [0, 1]\},$$

$$D = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \geq x_{i+1} \forall i = 1 \dots n-1, x_1 \leq x_n + 1\}.$$

Ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  è in relazione, tramite elementi di  $G$ , con un punto di  $P$ . È infatti sufficiente applicare ad esso una traslazione per portarlo in un qualche  $C_t$  con  $t \in [0, 1]$ . Per quanto detto, gli elementi di  $F$  agiscono come riflessioni rispetto a iperpiani del tipo  $x_i = x_j + c$ , con  $c$  intero. Questi formano  $\binom{n}{2}$  famiglie di iperpiani paralleli, che decompongono ogni iperpiano  $C_t$  in unione di semplici  $(n-1)$ -dimensionali. Tramite queste riflessioni, ogni punto di un dato  $C_t$  può essere portato in *uno ed un solo punto* del semplice  $D \cap C_t$ .

Non vi sono punti in relazione nella parte interna di  $P$ . Ciò discende dal fatto che gli elementi di  $G$  modificano  $\sum_{i=1}^n x_i$  di un valore intero, pertanto se due elementi  $x \in C_t$  e  $y \in C_q$ , con  $t, q \in [0, 1]$  fossero in relazione si dovrebbe necessariamente avere  $t - q \in \mathbb{Z}$ . A questo punto i casi sono due:

1.  $t = 0, q = 1$  oppure  $t = 1, q = 0$ , per cui  $x$  e  $y$  appartengono alle basi del prisma e non alla parte interna.
2.  $t = q$ , ma non possono esservi punti diversi in relazione all'interno di un semplice del tipo  $D \cap C_t$  poichè due tali punti  $x$  e  $y$  dovrebbero verificare  $g(x) = y$  per qualche  $g \in F$ , ossia dovrebbero essere ottenuti uno dall'altro tramite riflessioni rispetto a iperpiani del tipo  $x_i = x_j + c$  con  $c \in \mathbb{Z}$ , il che è impossibile per quanto detto precedentemente.

Rimangono da studiare eventuali relazioni tra le basi  $D \cap C_0$  e  $D \cap C_1$ . Notiamo che è sufficiente stabilire eventuali relazioni di equivalenza tra i vertici e tradurle in relazioni sugli involuipi convessi, poichè gli elementi di

$G$  preservano le combinazioni lineari con somma dei coefficienti uguale a 1. Sia infatti  $V = \{v_0, \dots, v_m\}$  un insieme di punti di  $\mathbb{R}^n$ , e sia  $x = \sum_{i=0}^m \lambda_i v_i$ , con  $\sum \lambda_i = 1$ . Gli elementi di  $G$  sono applicazioni affini, pertanto, scelto  $g \in G$  vale

$$g(x) = g\left(\sum_{i=0}^m \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0}^m \lambda_i g(v_i).$$

I vertici di  $D \cap C_0$  sono dati dall'origine ( $v_0$ ) e dagli  $n - 1$  punti

$$v_k = \left( \underbrace{\frac{k}{n}, \dots, \frac{k}{n}}_{(n-k) \text{ volte}}, \underbrace{\frac{k-n}{n}, \dots, \frac{k-n}{n}}_{k \text{ volte}} \right) \quad k = \{1, \dots, n-1\}.$$

I vertici di  $D \cap C_1$  sono dati da  $u_k = v_k + (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$ , cioè ogni  $u_k$  è ottenuto da  $v_k$  tramite una traslazione lungo l'asse altezza del prisma  $P$ . Per concludere, notiamo che ogni  $v_k$  è in relazione, componendo con  $\tau_j$  per  $j \geq n - k$ , con il punto  $(\frac{k}{n}, \dots, \frac{k}{n})$ . Ogni  $u_k$  è allo stesso modo in relazione con  $(\frac{k+1}{n}, \dots, \frac{k+1}{n})$ , quindi  $u_k$  è in relazione con  $v_{k+1}$  per  $k$  da 0 a  $n - 2$ , e  $u_{n-1}$  è in relazione con  $v_0$ . Da ciò segue la tesi.  $\square$

Si noti che gli spazi  $\mathcal{A}_n$  hanno la struttura di una varietà *lineare a tratti*. Tale struttura consente di mettere in evidenza la proprietà di un accordo di avere un certo numero di note ripetute. Supponiamo infatti di avere un accordo  $[x]$ , rappresentato da una  $n$ -upla  $x = (x_1, \dots, x_n)$  con  $x_i \in \mathbb{R}^n$ . Supponiamo che valga  $x_i - x_j = k$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ , ossia che la nota  $[x_i]_{S^1} = [x_j]_{S^1} \in S^1$  si ripeta nell'accordo stesso. Abbiamo visto che le riflessioni lungo gli iperpiani della forma  $x_i - x_j = k$  giacciono nel gruppo

$$G = \langle T^n, S_n \rangle$$

che definisce  $\mathcal{A}_n$  tramite

$$\mathcal{A}_n = \mathbb{R}^n / G.$$

Pertanto lo stabilizzatore del punto  $x$  è non banale, e il corrispondente punto  $[x]$  in  $\mathcal{A}_n$  risulta essere un punto di *specchio*.

Più in generale si supponga che valga  $x = (x_1, \dots, x_n)$  con  $x_1 - x_j \in \mathbb{Z}$  per ogni  $1 \leq j \leq m$ , con  $m \leq n$ . Tale condizione significa che ci sono  $m$  note ripetute. Allora lo stabilizzatore del punto  $x$  in  $G$  contiene un sottogruppo  $H$  isomorfo al gruppo di permutazione di  $m$  coordinate  $S_m$ , generato dalle riflessioni lungo iperpiani del tipo  $x_i - x_j = k$ .

Infine, dato  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , si consideri la partizione  $P_x$  di  $\{1, \dots, n\}$  ottenuta raggruppando le note ripetute, definita da

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \in P_x \Leftrightarrow x_{i_j} - x_{i_k} \in \mathbb{Z}.$$

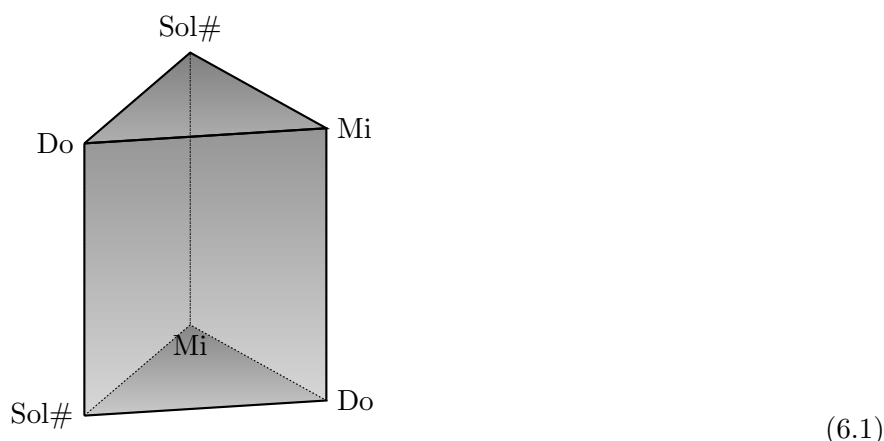
Supponiamo  $P_x$  consista di  $m$  insiemi  $R_1, \dots, R_m$  di cardinalità rispettivamente  $c_1, \dots, c_m$  (ammettiamo  $c_i = 1$ , ossia che una nota compaia una sola volta). Lo stabilizzatore del punto  $x$  sarà

$$\text{Stab}(x) \cong S_{c_1} \times S_{c_2} \times \dots \times S_{c_m}$$

dove  $S_{c_i}$  indica il gruppo di permutazioni di  $c_m$  elementi e corrisponde alle riflessioni lungo iperpiani del tipo  $x_i - x_j = k$  per  $i, j \in R_i$ .

Poichè è proprio lo stabilizzatore di un punto  $x$  a determinare la struttura di  $\mathcal{A}_n$  in un intorno del corrispondente punto  $[x]$ , si ottiene una corrispondenza tra quest'ultima e il numero di note ripetute nell'accordo.

Ad esempio nel caso  $n = 3$  i punti interni di  $\mathcal{A}_n$  sono quelli senza note ripetute (stabilizzatore banale), i punti sulle facce sono quelli con due note ripetute (ossia punti rappresentati da  $n$ -uple del tipo  $(x, x, y)$ , con stabilizzatore isomorfo a  $S_2$ ) e infine gli spigoli corrispondono ad accordi *unisoni* della forma  $(x, x, x)$ , con stabilizzatore isomorfo a  $S_3$  (si veda la figura sottostante).



La figura 6.1 fornisce una rappresentazione dello spazio  $\mathcal{A}_3$  come quoziente di un prisma  $P$ . Si ricordi che è necessario identificare le basi tramite una permutazione ciclica dei vertici. I vertici rappresentano accordi unisoni. Le tre note corrispondenti ai tre vertici dividono l'ottava in parti uguali, come in figura.

## 6.2 Rappresentazione del *voice-leading*

Gli spazi di accordi  $\mathcal{A}_n$  sono utili per la rappresentazione dei *voice-leading* tra accordi. Dati due accordi di  $n$  note  $(a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$ , un *voice-leading* tra di essi è un'associazione biunivoca tra le note del primo e del secondo. I *voice-leading* hanno lo scopo di interpretare una successione di accordi come una sovrapposizione di melodie, e costituiscono uno strumento di indagine delle relazioni tra armonia e melodia.

Dato un voice leading tra accordi  $(a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$  (ad esempio, a meno di permutazioni delle note,  $a_i \rightarrow b_i$ ), si consideri il segmento nel toro  $\mathcal{T}^n$  che unisce i punti  $(a_1, \dots, a_n)$  e  $(b_1, \dots, b_n)$  e lo si proietti nello spazio quoziente  $\mathcal{A}_n$ . Questa costituisce una rappresentazione grafica del voice leading dato (si noti che tra due accordi di  $n$  note esistono, in generale diversi voice-leading che danno luogo a diverse rappresentazioni sull'orbifold  $\mathcal{A}_n$ ). I punti singolari dell'orbifold (i bordi) agiscono come “specchi”, riflettendo il segmento in corrispondenza di punti con note ripetute. La metrica dello spazio  $\mathcal{A}_n$  fornisce una misura della distanza tra due accordi in termini di minimo tra le lunghezze dei voice-leading che li uniscono.

### 6.3 Gli accordi a *trasposizione limitata*

Dato un accordo  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ , un *trasposto* di tale accordo è un accordo della forma  $(a_1 + k, \dots, a_n + k)$ . In termini matematici, la trasposizione è descritta da un'azione  $\tau'$  di  $S^1$  su  $\mathcal{A}_n$ , dove si dà una struttura di gruppo alla circonferenza  $S^1$ , identificandola con il gruppo dei numeri complessi di modulo 1 con l'operazione di prodotto.

Tale azione può essere definita per passaggio a quoziente dell'azione  $\tau$  di trasposizione in  $\mathbb{R}^n$  definita, per  $k \in \mathbb{R}$  da

$$\tau_k(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + k, \dots, x_n + k)$$

come nel diagramma 6.2.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tau} & \text{Aut}(\mathbb{R}^n) \\ \downarrow \pi_{\mathbb{Z}} & & \downarrow \pi_G \\ \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1 & \xrightarrow{\tau'} & \text{Aut}(\mathcal{A}_n) \end{array} \quad (6.2)$$

Gli spazi  $\mathcal{A}^n$  forniscono una misura della possibilità di trasportare un accordo ottenendone di diversi. Essi possono infatti essere visti come unione di “fibre” isomorfe a  $S^1$ , quelle ottenute per trasposizione a partire da un punto qualsiasi.

Gli accordi a *trasposizione limitata* sono quelli che hanno stabilizzatore non banale per l'azione di trasposizione di  $S^1$ . In questa sezione mostreremo che tali accordi giacciono su fibre singolari.

Nella rappresentazione di  $\mathcal{A}_n$  come quoziente di un prisma con basi date da tetraedri  $(n-1)$ -dimensionali, le fibre si ottengono a partire da un punto per traslazioni parallele all'asse altezza del prisma. Nel caso particolare  $n=3$ , tale decomposizione dà al corrispondente spazio  $\mathcal{A}_3$  la struttura di un *fibrato di Seifert*.

### 6.3.1 Lo spazio $\mathcal{A}_3$ come fibrato di Seifert

**Definizione 6.7.** *Si consideri la varietà differenziabile  $S^1 \times D^2$ , il prodotto di una circonferenza con un disco di dimensione due. Una fibrazione modello di Seifert è una decomposizione di  $S^1 \times D^2$  in circonferenze disgiunte, dette fibre, così ottenuta*

1. *Si decomponga  $[0, 1] \times D^2$  come unione di segmenti della forma  $[0, 1] \times \{x\}$ .*
2. *Si identifichino i dischi  $\{0\} \times D^2$  e  $\{1\} \times D^2$  tramite una rotazione di angolo  $2\pi p/q$ , con  $p$  e  $q$  interi primi tra loro (ammettiamo anche  $p = 0$ ).*
3. *Il segmento centrale  $[0, 1] \times \{0\}$  diventa così una fibra  $S^1 \times \{0\}$ , mentre le altre fibre si ottengono incollando gli estremi di  $q$  segmenti della forma  $[0, 1] \times \{x\}$ .*

**Definizione 6.8.** *Data una varietà differenziabile  $M$  di dimensione 3, si definisce fibrazione di Seifert su  $M$  una decomposizione di  $M$  in unione di sottoinsiemi isomorfi alla circonferenza  $S^1$ , con la proprietà che ogni fibra ha un intorno diffeomorfo, tramite un diffeomorfismo che preservi la decomposizione in fibre, all'intorno della fibra  $S^1 \times \{0\}$  in una qualche fibrazione modello di Seifert di  $S^1 \times D^2$ . Una 3-varietà differenziabile munita di una fibrazione di Seifert si definisce fibrato di Seifert.*

**Definizione 6.9.** *Per ogni fibra  $f$  di una fibrazione di Seifert si può definire la molteplicità della fibra stessa come la cardinalità dell'intersezione tra un piccolo disco trasversale ad  $f$  con una qualunque delle fibre vicine a  $f$  stessa.*

### 6.3.2 La fibrazione degli spazi $\mathcal{A}_n$

La definizione di fibrato di Seifert che abbiamo dato si applica solo alle varietà di dimensione 3, mentre gli spazi  $\mathcal{A}_n$  sono varietà di dimensione  $n$ . Alcune proprietà sono però conservate nel caso generale.

Innanzitutto si conserva, come già detto, la decomposizione in fibre isomorfe a  $S^1$ , quelle ottenute per trasposizione a partire da un punto qualsiasi.

**Proposizione 6.10.** *L'orbita per l'azione di trasposizione di  $S^1$  su un qualsiasi punto di  $\mathcal{A}^n$  è isomorfa a  $S^1$ .*

*Dimostrazione.* Quella di trasposizione è un'azione continua di  $S^1$  su  $\mathcal{A}_n$ , ossia l'applicazione

$$\phi : S^1 \times \mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{A}_n, \quad \phi(z, x) = z \cdot x$$

che definisce l'azione di trasposizione è un'applicazione continua se si pone su  $S^1 \times \mathcal{A}_n$  la topologia prodotto.

Fissato un elemento  $x \in \mathcal{A}_n$ , vogliamo quindi descrivere l'immagine di  $S^1 \times \{x\}$  tramite  $\phi$ . Per fare ciò è sufficiente descrivere la topologia dello spazio  $S^1/Stab(x)$ , dove  $Stab(x) < S^1$  indica lo stabilizzatore di  $x$ .

Si consideri infatti l'applicazione  $\phi'$ , definita per passaggio al quoziente con  $Stab(x)$  come nel diagramma sottostante.

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 \times \{x\} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{A}_n \\
 \searrow \pi & & \nearrow \phi' \\
 & S^1/Stab(x) &
 \end{array}$$

$\phi'$  è certamente una bigezione tra  $S^1/Stab(x)$  e la fibra a cui  $x$  appartiene in virtù delle proprietà delle azioni di gruppi, ed è continua perchè lo è  $\phi$  stessa. Inoltre è chiusa. Si consideri infatti un chiuso  $C \subset S^1/Stab(x)$ .  $\pi^{-1}(C)$  è certamente un chiuso di  $S^1 \times \{x\}$ , poichè  $\pi$  è continua. Ma allora è un compatto, dal momento che  $S^1$  lo è. Allora  $\phi(\pi^{-1}(C)) = \phi'(C)$  è compatto. Ma  $\mathcal{A}_n$  è uno spazio di Hausdorff, quindi  $\phi'(C)$  è necessariamente chiuso. Da ciò segue che  $\phi'$  è un isomorfismo.

$Stab(x)$  è certamente un sottogruppo discreto di  $S^1$  dal momento che  $S^1$  agisce, nella rappresentazione di  $\mathcal{A}_n$  come quoziente di un prisma retto  $P$ , tramite una traslazione rispetto all'asse altezza, e non possono esistere traslazioni di lunghezza arbitrariamente piccola in grado di riportare un punto in sè stesso.

Gli unici sottogruppi discreti di  $S^1$  sono gruppi ciclici finiti del tipo  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , costituiti, come insieme, da  $n$  punti equidistanti di  $S^1$  (con la proprietà che  $1 \in S^1$  vi appartiene). I quozienti di  $S^1$  per l'azione di gruppi di tale forma sono sempre isomorfi a  $S^1$ , e sono generati da rotazioni di angolo  $2\pi/n$   $\square$

Come nel caso dei fibrati di Seifert, la molteplicità di una fibra è definibile come la cardinalità dello stabilizzatore di uno qualsiasi dei punti che la compongono. In virtù di tale definizione si ha una relazione tra la cardinalità dello stabilizzatore di un punto (che esprime la possibilità di trasportare il corrispondente accordo) e la lunghezza della fibra a cui appartiene. In  $\mathcal{A}_n$ , dato un punto  $x$  appartenente a una fibra  $f$ , indicando con  $l(f)$  la lunghezza della fibra vale

$$l(f) = \frac{n}{|Stab(x)|}.$$

Ad esempio, nel caso  $n = 4$ , una fibra singolare di lunghezza 1 in corrispondenza al baricentro della base (che rappresenterà gli accordi che dividono l'ottava in 4 parti uguali), fibre di lunghezza 2 in corrispondenza di accordi del tipo  $(x, x + \frac{1}{2}, y, y + \frac{1}{2})$  e fibre regolari di lunghezza 4 in corrispondenza di tutti gli altri punti.

La lunghezza di una fibra  $f$  sarà direttamente proporzionale alla cardinalità della sua intersezione con una base  $B$  del prisma  $P$ , ossia con la cardinalità dell'orbita di un qualsiasi punto di  $f \cap B$  per l'azione indotta da una permutazione ciclica dei vertici di  $B$ .

Si può così verificare che gli accordi a trasposizione limitata sono quelli che dividono l'ottava in parti uguali, o quelli che sono unione di sottoinsiemi (tutti della stessa cardinalità) che dividono l'ottava in parti uguali (in sostanza quelli che, rappresentati come unione di punti di  $S^1$ , vengono mandati in sé stessi da rotazioni non banali).

## 6.4 Ulteriori quozienti degli spazi di accordi

Possiamo quozientare gli spazi  $\mathcal{A}_n$  sopra introdotti per due ulteriori relazioni di equivalenza. La prima è quella di trasposizione, ottenuta a partire dall'azione di  $S^1$  definita nella sezione precedente. Il risultato di tale quoziente è quello di collassare le fibre ad un solo punto.

Nel caso tridimensionale si avranno rappresentanti per la classe degli accordi maggiori, minori, per le triadi aumentate e così via.

**Proposizione 6.11.** *Lo spazio  $\mathcal{A}_n/S^1$  è isomorfo allo spazio ottenuto nel modo seguente:*

1. Sia  $B_1$  un semplice  $(n-1)$ -dimensionale di vertici  $v_1, \dots, v_{n-1}$
2. Si consideri l'azione ciclica di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sull'insieme dei vertici generata da  $\phi(v_i) = v_{i+1}$ .
3. La si estenda a un'azione di  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  su tutto  $B_1$ , generata da  $\Phi$  definita da:

$$\Phi\left(\sum_{i=0, n-1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0, n-1} \lambda_i \phi(v_i).$$

$$\mathcal{A}_n/S^1 \cong B_1/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}).$$

*Dimostrazione.* Partiamo dalla rappresentazione di  $\mathcal{A}_n$  come quoziente di un prisma retto  $P$  con basi  $B_1$  e  $B_2$  date da semplici  $(n-1)$ -dimensionali di vertici rispettivamente  $v_0, \dots, v_{n-1}$  e  $u_0, \dots, u_{n-1}$ .

Ogni punto può essere proiettato tramite trasposizione sulla base  $B_1$ , in modo tale da identificare ogni  $u_i$  con  $v_i$  ma, per quanto detto precedentemente, ogni  $u_i$  è in relazione con  $v_{i+1}$ . Componendo queste relazioni di equivalenza si vede che è necessario identificare ogni vertice  $v_i$  con  $v_{i+1}$  per  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $v_{n-1}$  con  $v_0$  e tradurre questa in una relazione di equivalenza su tutta la base  $B_1$  (poichè le trasposizioni preservano le combinazioni lineari con somma dei coefficienti uguale a 1).  $\square$



**Osservazione 6.12.** Possiamo visualizzare lo spazio  $\mathcal{A}_n/S^1$  come un cono con base lo spazio ottenuto a partire dal bordo di un  $(n-1)$ -simpleso (topologicamente una sfera di dimensione  $n-2$ ) quozientandolo tramite la relazione di equivalenza indotta da una permutazione ciclica dei vertici.

Il vertice del cono rappresenterà la classe degli accordi di  $n$  note che dividono l'ottava in  $n$  parti uguali.

L'ultima relazione di equivalenza che andiamo a considerare è quella di *inversione*, generata dall'azione del gruppo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle i \rangle$ , con  $i$  che indica la riflessione rispetto all'origine in  $\mathbb{R}^n$ . Posta  $t \in S^1$  una qualsiasi trasposizione vale  $i \circ t \circ i = t^{-1}$ . Inoltre i gruppi di trasformazioni  $S^1$  e  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  hanno intersezione banale, per cui si può decomporre il gruppo di trasformazioni generato da  $S^1$  e  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  come un prodotto semidiretto. Indichiamo lo spazio ottenuto da  $\mathcal{A}_n$  tramite il quoziente per trasposizione e inversione con  $\mathcal{A}_n/(S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

**Proposizione 6.13.** Lo spazio  $\mathcal{A}_n/(S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  è isomorfo allo spazio ottenuto nel modo seguente:

1. Sia  $B_1$  un simpleso  $(n-1)$ -dimensionale di vertici  $v_1, \dots, v_{n-1}$
2. Si consideri l'azione del gruppo diedrale  $\mathbb{D}_n$  sull'insieme dei vertici generata da  $\phi(v_i) = v_{i+1}$  e  $\psi(v_i) = v_{-i}$ .
3. La si estenda a un'azione di  $\mathbb{D}_n$  su tutto  $B_1$ , generata da  $\Phi$  e  $\Psi$  definite da:

$$\Phi\left(\sum_{i=0, n-1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0, n-1} \lambda_i \phi(v_i),$$

$$\Psi\left(\sum_{i=0, n-1} \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=0, n-1} \lambda_i \psi(v_i).$$

$$\mathcal{A}_n/(S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong B_1/\mathbb{D}_n.$$

*Dimostrazione.* Partiamo dalla rappresentazione di  $\mathcal{A}_n$  come quoziente del prisma  $P$  con base  $B_1$  di vertici  $v_0, \dots, v_{n-1}$ . La relazione di trasposizione  $S^1$  comporta, per quanto detto prima, la necessità di quozientare per l'azione indotta dalla permutazione ciclica dei vertici. Rimane da studiare l'azione dell'inversione  $i$  sui vertici.

Consideriamo i vertici  $v_i$  della base  $B_1$  di  $P$  come punti di  $\mathbb{R}^n$ . Si noti che l'azione del gruppo  $S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  può essere definita per passaggio a quoziente su  $\mathcal{A}_n$  dell'azione del gruppo  $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  su  $\mathbb{R}^n$ , dove  $t \in \mathbb{R}$  agisce nel modo seguente:

$$t \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t).$$

A meno di comporre con traslazioni intere del gruppo  $T^n$ , ogni vertice  $v_i$  è in relazione col punto  $(\frac{i}{n}, \dots, \frac{i}{n}) = p_i$ . Indicando con  $t_1 \in \mathbb{R}$  la trasposizione

di un'ottava ( $t_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + 1, \dots, x_n + 1)$ ) si ha

$$t_1 \circ i(p_i) = \left( \frac{n-i}{n}, \dots, \frac{n-i}{n} \right) = p_{n-i}$$

Componendo queste relazioni si ottiene  $v_i \sim v_{n-i}$ , cioè la relazione (2) e, sfruttando il fatto che l'inversione preserva le combinazioni lineari con somma dei coefficienti uguale a 1, si estende la relazione di equivalenza sui vertici a tutto il simpleso.

□

**Osservazione 6.14.** *Come abbiamo fatto nel caso precedente, possiamo visualizzare lo spazio  $\mathcal{A}^n/S^1 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  come il cono sullo spazio ottenuto a partire dal bordo di un simpleso di dimensione  $n-1$  tramite l'azione indotta dal gruppo diedrale di  $2n$  elementi  $\mathbb{D}_n \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , dove  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  permuta ciclicamente i vertici, e  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  li inverte come descritto sopra.*

# Appendice A

## Strucutures 1a

In questa appendice proponiamo l'analisi di un brano musicale: *Structures 1a* di Pierre Boulez. Composta nel 1952, quest'opera costituisce uno degli esempi più celebri e studiati di musica seriale. Una prima analisi di questo brano fu proposta da György Ligeti ([14]). Ad essa facciamo riferimento nella presente trattazione, unitamente ai contributi ([16], [13], [15]).

Nella composizione di *Structures 1a*, Boulez applica i principi del *serialismo integrale*. L'evoluzione del brano è governata da una serie dodecafonica  $s$  e dalle sue derivate. I valori assunti da tali serie intervengono a determinare *tutti* (da qui l'aggettivo *integrale*) i parametri caratteristici delle note: altezza, durata, intensità e attacco. Nella presente trattazione ci limiteremo allo studio delle altezze.

Il brano è costruito sulla serie

Mib, Re, La, Lab, Sol, Fa#, Mi, Do#, Do, Sib, Fa, Si

La riscriviamo come una successione di elementi di  $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  sfruttando l'identificazione delle note del pentagramma con tale insieme e otteniamo la serie

$$s = (3, 2, 9, 8, 7, 6, 4, 1, 0, 10, 5, 11)$$

$$I_3 \cdot s \downarrow$$

|                 |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                 | 0  | 11 | 6  | 5  | 4  | 3  | 1  | 10 | 9  | 7  | 2  | 8  |    |
| $s \rightarrow$ | 0  | 3  | 2  | 9  | 8  | 7  | 6  | 4  | 1  | 0  | 10 | 5  | 11 |
|                 | 1  | 4  | 3  | 10 | 9  | 8  | 7  | 5  | 2  | 1  | 11 | 6  | 0  |
|                 | 6  | 9  | 8  | 3  | 2  | 1  | 0  | 10 | 7  | 6  | 4  | 11 | 5  |
|                 | 7  | 10 | 9  | 4  | 3  | 2  | 1  | 11 | 8  | 7  | 5  | 0  | 6  |
|                 | 8  | 11 | 10 | 5  | 4  | 3  | 2  | 0  | 9  | 8  | 6  | 1  | 7  |
|                 | 9  | 0  | 11 | 6  | 5  | 4  | 3  | 1  | 10 | 9  | 7  | 2  | 8  |
|                 | 11 | 2  | 1  | 8  | 7  | 6  | 5  | 3  | 0  | 11 | 9  | 4  | 10 |
|                 | 2  | 5  | 4  | 11 | 10 | 9  | 8  | 6  | 3  | 2  | 0  | 7  | 1  |
|                 | 3  | 6  | 5  | 0  | 11 | 10 | 9  | 7  | 4  | 3  | 1  | 8  | 2  |
|                 | 5  | 8  | 7  | 2  | 1  | 0  | 11 | 9  | 6  | 5  | 3  | 10 | 4  |
|                 | 10 | 1  | 0  | 7  | 6  | 5  | 4  | 2  | 11 | 10 | 8  | 3  | 9  |
|                 | 4  | 7  | 6  | 1  | 0  | 11 | 10 | 8  | 5  | 4  | 2  | 9  | 3  |

(A.1)

Si osservi ora la matrice  $M$  (A.1). Essa presenta nella prima riga, da sinistra a destra la serie  $s$ , e nella prima colonna, dall'alto in basso, la serie  $I_3 \cdot s$ , ottenuta da  $s$  tramite inversione rispetto alla prima nota di  $s$  stessa, il Mi bemolle ( $I_3 = T_3 \cdot I \cdot T_9 = T_6 \cdot I$ ). Le altre righe si ottengono per trasposizione dalla prima, in modo che la prima nota della  $i$ -esima riga sia la  $i$ -esima nota della serie  $I_3 \cdot s$ . Per formalizzare il precedente ragionamento, indichiamo con  $a_{ij}$  per  $i, j \in \{0, \dots, 11\}$  il coefficiente della matrice posto all'intersezione dell' $i$ -esima riga con la  $j$ -esima colonna. Allora vale:

1.  $a_{0j} = s(j)$
2.  $a_{i0} = 6 - s(i)$
3.  $a_{ij} = s(j) + a_{i0} - a_{00} = s(j) - s(i) + 3$

Vale il seguente risultato:

**Proposizione A.1.** *La trasposta della matrice  $M$  si ottiene da  $M$  stessa per inversione dei coefficienti rispetto al Mi bemolle, ossia*

$$a_{ji} = 6 - a_{ij} \tag{A.2}$$

*Dimostrazione.*  $a_{ij} = s(j) - s(i) + 3$ ,  $6 - a_{ij} = s(i) - s(j) + 3 = a_{ji}$ . □

Seguono i seguenti fatti:

1.  $\forall i, a_{ii} = 3$
2. Le colonne della matrice  $M$  sono ottenute dalla prima per trasposizione, in modo da avere la serie  $s$  sulla prima riga, ossia

$$a_{ij} = a_{i0} + s(j) - s(0)$$

*Dimostrazione.* Per l'equazione A.2,  $2 \cdot a_{ii} = 6$ , pertanto  $a_{ii} = 3$ .

Per quanto riguarda il punto 2, è sufficiente notare che vale  $a_{i0} = 6 - s(i)$ . Dalla definizione di  $M$

$$a_{ij} = s(j) - s(i) + 3 = s(j) + (6 - s(i)) - 3 = s(j) + a_{i0} - s(0)$$

□

La matrice  $M$  svolge un ruolo determinante nello sviluppo del brano. Structures 1a può essere suddivisa in gruppi di battute. Ciascun gruppo di battute è a sua volta suddivisibile in un certo numero di linee, eseguite dai due pianoforti. In ogni gruppo di battute, ciascuna linea esegue una delle serie ottenibili selezionando una riga o una colonna della matrice  $M$ . Nella parte iniziale del brano, fino alla sessantaquattresima battuta, il primo pianoforte esegue le serie ottenute selezionando le righe della matrice  $M$ , e quindi trasposte della serie di partenza. Il secondo pianoforte esegue le serie ottenute selezionando le colonne, quindi trasposte dell'inversa di  $s$ .

Si osservi nuovamente la matrice  $M$ . Si possono notare delle etichette poste sul margine sinistro, accanto alla prima nota di ciascuna riga. L'etichetta dell' $i$ -esima riga corrisponde all'intervallo  $a_{i0} - a_{00}$ . Similmente si possono notare delle etichette poste in alto, sopra la prima nota di ogni colonna. L'etichetta posta sopra la  $j$ -esima colonna indica l'intervallo  $a_{0j} - a_{00}$ . Usiamo queste etichette per specificare righe e colonne della matrice:  $[T_i]$  corrisponderà alla riga etichettata da  $i$ , mentre  $[I_j]$  indicherà la colonna etichettata da  $j$ .

L'analisi completa delle altezze nelle prime sessantaquattro battute è elencata qui sotto. Per ogni gruppo di battute indichiamo in sequenza il numero di linee e le serie eseguite dai due pianoforti,

1. Battute 1-7, Linee 2, Piano 1  $[T_0]$ , Piano 2  $[I_0]$
2. Battute 8-15, Linee 4, Piano 1  $[T_1]$   $[T_6]$ , Piano 2  $[I_{11}]$   $[I_6]$
3. Battute 16-23, Linee 3, Piano 1  $[T_7]$   $[T_8]$ , Piano 2  $[I_5]$
4. Battute 24-31, Linee 1, Piano 2  $[I_4]$
5. Battute 32-39, Linee 6, Piano 1  $[T_9]$   $[T_{11}]$   $[T_2]$ , Piano 2  $[I_3]$   $[I_1]$   $[I_{10}]$

6. Battute 40-47, Linee 2, Piano 1  $[T_3]$ , Piano 2  $[I_9]$
7. Battute 48-56, Linee 5, Piano 2  $[T_5]$   $[T_{10}]$   $[T_4]$ , Piano 2  $[I_7]$   $[I_2]$
8. Battute 57-64, Linee 1, Piano 2  $[I_8]$

Si può notare un movimento discendente, dalla prima all'ultima righe, per le serie del primo pianoforte e un movimento dalla prima all'ultima colonna per le note del secondo.

Si noti inoltre come le serie suonate dal secondo pianoforte siano le trasposte (nella matrice  $M$ ) delle serie suonate dal primo, e quindi per l'equazione A.2 si ottengano da queste ultime per inversione rispetto al Mi bemolle (cioè la serie nella  $i$ -esima colonna è l'inversa rispetto al Mi bemolle della serie nella  $i$ -esima riga).

Boulez usa un procedimento simile anche nella seconda parte della composizione, in questo caso però intervengono le serie ottenute per retrogradazione a partire da righe e colonne della matrice  $M$ . Indichiamo con  $[R_i]$  la serie ottenuta per retrogradazione da  $[T_i]$ , e similmente con  $[RI_j]$  la serie ottenuta per retrogradazione da  $[I_j]$ . Allora la successione delle altezze nella seconda parte del brano è la seguente:

1. Battute 65-72, Linee 5, Piano 1  $[RI_4]$   $[RI_{10}]$   $[RI_5]$ , Piano 2  $[R_8]$   $[R_2]$
2. Battute 73-81, Linee 3, Piano 1  $[RI_3]$ , Piano 2  $[R_7]$   $[R_9]$
3. Battute 82-89, Linee 4, Piano 1  $[RI_2]$   $[RI_{11}]$ , Piano 2  $[R_{10}]$   $[R_1]$
4. Battute 90-97, Linee 4, Piano 1  $[RI_9]$   $[RI_8]$ , Piano 2  $[R_3]$   $[R_4]$
5. Battute 98-105, Linee 2, Piano 1  $[RI_7]$ , Piano 2  $[R_5]$
6. Battute 106-115, Linee 6, Piano 1  $[RI_6]$   $[RI_1]$   $[RI_0]$ , Piano 2  $[R_6]$   $[R_{11}]$   $[R_0]$

Si noti che gli indici della successione delle serie  $[R_i]$  sono ottenuti per retrogradazione dagli indici delle serie  $[I_j]$  nella prima parte del brano. Allo stesso modo gli indici della successione  $[RI_i]$  si ottengono per retrogradazione dagli indici delle serie  $[T_j]$  nella prima parte.

L'aspetto su cui vale la pena di insistere è che l'intera evoluzione del brano è *regolata* da una successione *non casuale* di derivate di una serie di partenza. Si assiste a una fortissima generalizzazione dei principi della musica dodecafonica: al di là del fatto che la serialità governi, oltre alle altezze, gli altri parametri caratteristici delle note, il meccanismo che regola la scelta delle derivate della serie di partenza (scelta che, nella musica dodecafonica, è arbitraria) discende da un procedimento puramente matematico.

# Bibliografia

- [1] Franck Jedrzejewski (2006): *Mathematical Theory of Music*, DELA-TOUR FRANCE/Ircam-Centre Pompidou (2006), 105-121
- [2] Andrei Khruzin (2000): *Enumeration of Chord Diagrams*, preprint *ArXiv*, math.CO/0008209, 2000
- [3] William Burnside (1897): *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press (1897)
- [4] N. G. De Bruijn (1972): *Enumeration of Mapping Patterns*, Journal of Combinatorial Theory **12** (1972), 14-20
- [5] N. G. De Bruijn (1964): *Polya's Theory of Counting*, Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley and Sons (1964), capitolo quinto
- [6] Dmitri Tymoczko (2006): *The Geometry of Musical Chords*, Science **313** (2006), 72
- [7] Clifton Callender, Ian Quinn, Dmitri Tymoczko (2008): *Generalized Voice-Leading Spaces*, Science **320** (2008), 346
- [8] William P. Thurston (2001): *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Electronic version 1.1-March 2002, <http://www.msri.org/publications/books/gt3m>
- [9] William Hibbard (1969): *The Politics of Harmony*, Perspectives of New Music **Vol. 7, No. 2** (Spring - Summer, 1969), 155-166
- [10] Godfrey Winham (1970): *Composition with Arrays*, Perspectives of New Music **Vol. 9, No. 1** (Autumn - Winter, 1970), 43-67
- [11] Louis Karchin (1989): *Pitch Centricity as an Organizing Principle in Speculum Speculi of Charles Wuorinen*, Theory and Practice **14/15** (1989/90), 59-82
- [12] Hubert S. Howe Jr. (1965): *Some Combinatorial Properties of Pitch Structures*, Perspectives of New Music **Vol. 4, No. 1** (Autumn - Winter, 1965), 45-61

- [13] Fabio De Sanctis De Benedictis (2009): *Strutture formali e parametriche nella musica del secondo Novecento: alcuni esempi*
- [14] György Ligeti (1960): *Pierre Boulez*, die Reihe **4**, Theodore Presser Co., Pennsylvania (1960)
- [15] Lynden Deyoung (1978): *Order and Duration Order in Boulez's Structure 1a*, Perspectives of New Music **Vol. 16, No. 2** (Spring - Summer, 1978), 27-34
- [16] Guerino Mazzola, Catherine Losada, Florian Thalmann, Schuyler Tsuda (2008): *Topos Theory for a Creative Analysis of Boulez's Structures*, Somashekhar Naimpally, Giuseppe Di Maio (eds.): Quaderni di Matematica, Theory And Applications of Proximity, Nearness and Uniformity, **Vol 23** (2009)
- [17] Guerino Mazzola (1990) *Geometrie der Toene*, Basel, Birkhauser Verlag (1990)
- [18] Moreno Andreatta (2003) *Méthodes algébriques en musique et musicologie du XXe siècle. Aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, PhD, EHESS (2003)